

Doktori értekezés

Nagy Imre

2009

ÉGI MECHANIKAI TÖBBTEST RENDSZEREK STABILITÁSA

Doktori értekezés

NAGY IMRE

Fizika Doktori Iskola

Részecskefizika, nagyenergiájú magfizika, csillagászat program

Doktori iskola vezetője: Dr. Horváth Zsolt egyetemi tanár

Programvezető: Dr. Csikor Ferenc egyetemi tanár

Témavezető: Dr. Érdi Bálint egyetemi tanár

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Csillagászati Tanszék

Budapest, 2009.

Édesanyámnak

Tartalomjegyzék

1. Előszó	5
1.1. Töbtest rendszerek az égbolton	5
1.2. Miért fontos a kettős rendszerek vizsgálata?	6
1.3. Pályák kettős rendszerekben	8
2. A Naprendszer kettősei	11
2.1. Bevezetés	11
2.2. Módszerek	12
2.2.1. Relatív Ljapunov-indikátor	13
2.2.2. Maximális excentricitás	14
2.2.3. Excentricitások különbségének maximuma	15
2.2.4. Az alkalmazott módszerek összehasonlítása	15
2.3. A Plútó holdrendszerének stabilitása	21
2.3.1. A vizsgált rendszer és a kezdeti feltételek	22
2.3.2. A Plútó–Charon rendszer pályaelem-tere	23
2.3.3. A Nix és a Hydra pályájának stabilitása	25
2.3.4. A Nix és a Hydra eredetéről	26
2.4. Kettős Kuiper-objektumok dinamikája	28
2.4.1. A vizsgált rendszer és a kezdeti feltételek	32
2.4.2. Az excentricitás csökkenés karakterisztikus ideje	33
2.4.3. Az a, e sík általános jellemzése	34
2.4.4. A vizsgált rendszerek paraméter-tere	35
2.5. Összefoglalás	44
3. Másodlagos rezonanciák trójai típusú égitestek mozgásában	47
3.1. Bevezetés	47
3.2. Az elliptikus korlátozott háromtest-probléma önhasznó megoldásai	48
3.2.1. Stabilitás kör korlátozott esetben	49
3.2.2. Stabilitás elliptikus esetben	53
3.3. Az L_4 pont körüli stabil tartomány vizsgálata	56
3.3.1. A librációs mozgás rezonanciái	56
3.3.2. Az L_4 körüli stabil tartomány méreteloszlása	61
3.4. Következtetések	68
4. Zárszó	71
A. A Rabe-féle frekvencia egyenlet együtthatói	79

1. fejezet

Előszó

1.1. Töbttest rendszerek az égbolton

A csillagászati megfigyelések kezdetén azt vették észre, hogy az égbolton néhol két-három csillag nagyon közel van egymáshoz. Ezekről később, a távcsöves vizsgálatok során kiderült, hogy többnyire csak egymáshoz közeli irányban látszanak, és a közöttük lévő óriási távolságok miatt nem alkotnak gravitációsan kötött rendszert. Más távcsöves megfigyelések során viszont korábban magányosnak vélt csillagokról bizonyosodott be, hogy valójában két vagy több tagból álló összetett rendszerek. Kiderült, hogy a fősorozati csillagok közel 60%-a kettős vagy többszörös rendszereket alkot (Duquenois és Mayor, 1991). A fősorozat előtti csillagoknak azonban még ennél is nagyobb része – majdnem az összes – többszörös rendszer tagja (Mathieu és mtsai, 2000; Zinnecker és Mathieu, 2001). Úgy tűnik, hogy a csillagok általában lazán kötött többes rendszerekben születnek, amelyek fejlődésük során szétesnek.

Gravitációsan kötött töbttest rendszereket azonban nem csak a csillagok között találunk. A Lokális Csoport két legnagyobb tagja, az Androméda galaxis és a Tejútrendszer lényegében egy kettős rendszert alkot, amelynek számos, az előbbi kettőhöz képest kisméretű, törpegalaxisokból álló kísérője van. Ezek egy része a kettős valamelyik tagja körül kering, másik része pedig olyan pályán halad, amelyen egyszerre kerüli körbe mind a kettőt.

Ha a csillagoktól a méretskála másik vége felé indulunk, ott találjuk a bolygókat. Naprendszerünkben valójában két kettősbolygót is találunk. Az egyik a Föld–Hold rendszer, a másik pedig a korábban bolygóként katalogizált Plútó és kísérője, a Charon által alkotott rendszer. Mint az 1.1. táblázatból is látszik, mindkét rendszer $\mu = m_{hold}/(m_{bolygo} + m_{hold})$ tömegparamétere két, illetve három nagyságrenddel nagyobb a többi bolygó–hold páros

1.1. táblázat. A bolygók és legnagyobb holdjaik összehasonlítása. (m_b a bolygó tömege, R_I a hatássférea sugara, m_h a hold tömege, a a hold pályájának fél nagytengelye, μ a rendszer tömegparamétere)

Bolygó	m_b [kg]	R_I [km]	Hold	m_h [kg]	a [km]	μ
Merkúr	$3,03 \times 10^{23}$	112000	–	–	–	–
Vénusz	$4,87 \times 10^{24}$	616000	–	–	–	–
Föld	$5,97 \times 10^{24}$	925000	Hold	$7,35 \times 10^{22}$	384400	0.0123
Mars	$6,42 \times 10^{23}$	577000	Phobos	$1,08 \times 10^{16}$	9378	10^{-5}
Jupiter	$1,90 \times 10^{27}$	48200000	Ganymedes	$1,48 \times 10^{23}$	1070000	10^{-4}
Szaturnusz	$5,68 \times 10^{26}$	54800000	Titan	$1,35 \times 10^{23}$	1221830	10^{-4}
Uránusz	$8,68 \times 10^{25}$	51700000	Titania	$3,49 \times 10^{21}$	436000	10^{-4}
Neptunusz	$1,02 \times 10^{26}$	86700000	Triton	$2,14 \times 10^{22}$	354760	10^{-4}
Plútó	$1,27 \times 10^{22}$	3150000	Charon	$1,90 \times 10^{21}$	19640	0.13

hasonló adatánál. Ez a tény feljogosít bennünket, hogy ezeket a rendszereket ne mint bolygó és hold alkotta párosnak, hanem kettősbolygónak tekintsük.

A méretskálán lefelé lépkedve jutunk el a kisbolygókhoz. A Naprendszerben jelenleg két olyan tartományt ismerünk, ahol ezek nagyobb számban fordulnak elő. Az egyik a Mars és a Jupiter pályája közötti úgynevezett fő kisbolygóöv, a másik pedig a Neptunusz pályáján túl kezdődő Kuiper-öv. Mindkét tartományban találunk olyan kettős rendszereket, amelyek befogással keletkeztek, és olyanokat is, amelyek kisebb tagja két nagyobb égitest ütközése során kibodódott anyagból állhatott össze. A kisbolygók két főbb előfordulási tartománya mellett olyan különleges helyeken is találunk kettősöket, mint a Jupiter L_4 és L_5 Lagrange-pontjainak környezetében, vagyis a Trójai kisbolygók között.

Ha megnézzük a többszörös rendszereken belül a különböző számú tagból állók arányát, azt találjuk, hogy a fősorozati csillagok között hozzávetőlegesen minden ötödik kettősre jut egy legalább három csillagból álló rendszer. A legalább négy tagból álló rendszerek a minimum háromtagúak ötödét teszik ki (Marik, 1989). A bolygók és kisbolygók között napjainkig nem ismert egyetlen olyan rendszer sem, amely három, közel egyforma tömegű tagból állna. Ezek a számok azt jelzik, hogy a megfigyelések szempontjából lényegesen fontosabbak a két közel egyenlő tömegű testből álló rendszerek, mint a több testből állók, így a továbbiakban elsősorban ezekről lesz szó.

1.2. Miért fontos a kettős rendszerek vizsgálata?

A kettőscsillagok magas aránya már önmagában is jelzi a kettős rendszerek körüli térség stabilitása vizsgálatának fontosságát, amit még jobban hangsúlyoz az a tény, hogy az ilyen rendszerekben már eddig is több bolygót fedeztek fel. Felmerül ugyanis a kérdés,

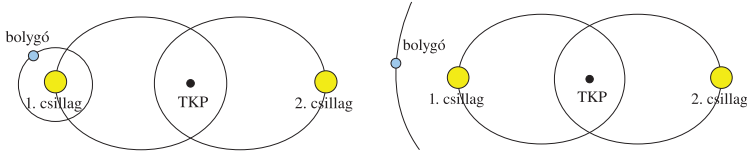
hogy egy kettőscsillag bolygója milyen pályán keringhet, és hogy létezik-e kellően stabil pálya a két csillagot körülvevő lakható tartományban (Kasting és mtsai, 1993).

Bár a Naprendszer ismert nagyobb (1000 *km*-t meghaladó) méretű égitestjei közül csak két rendszert mondhatunk kettősnek, ezek közül az egyikben található szűkebb otthonunk, a Föld. Itt a mesterséges holdak egyre növekvő száma teszi fontossá a pályák stabilitásának kérdését. Bolygónk környezetében a Nap közelsége miatt nem elég pusztán a Föld és a Hold hatását figyelembe venni. Egy ilyen, négy testből álló rendszer vizsgálata már túlmutat a jelen dolgozatban alkalmazott modell lehetőségein, így ezzel itt most nem foglalkozunk.

A Plútó körül 2005-ben fedeztek fel két holdat, a Nixet és a Hydrat (Stern és mtsai, 2005). Ezek létezése, elhelyezkedésük a rendszerben, hozzásegíthet a Plútó és a Charon kialakulásának jobb megértéséhez. Hasonló módon, a kettős kisbolygók esetén is az adott rendszer keletkezési mechanizmusára lehetne következtetéseket levonni, ha találnánk körülöttük egy vagy több kísérőt.

A kettős rendszerek egy elfajult változatát képezik az egy csillagból és óriásbolygóból álló rendszerek. Az eddig talált exobolygók általában gázbolygók, és sokszor a Naprendszer hasonló bolygóinál lényegesen közelebb keringenek a központi csillagukhoz. A Föld-típusú bolygók kimutatására alkalmas eszközök napjainkban kezdenek munkába állni. Az egyik első ilyen berendezés, a COROT, 2006 decemberében került földköri pályára, 2009 március 6.-án indult három és fél éves útjára a Kepler, amit a tervek szerint 2011 decemberében követ az ESA által épített Gaia. Az űrtávcsövek mellett néhány földi távcső is bekapcsolódik a keresésbe. Az új berendezések szolgálatba állása révén különösen fontossá vált annak a kérdésnek a tisztázása, hogy létezhetnek-e földszerű bolygók a lakható zónában. Amennyiben az említett tartományban óriásbolygó kering, úgy igen valószínűtlen, hogy ott egy további bolygót találjunk. Ilyen esetben az egyetlen lehetséges helynek a csillagból és az óriásbolygóból álló kettős rendszer Lagrange-pontjai körüli tartomány tűnik, feltéve, hogy létezik a pontok körül stabil librációs pálya.¹ Amennyiben a Lagrange-pontok környezetében található bolygó mérete megközelíti a Földét, azok az említett új műszerek segítségével kimutathatóak.

¹Elképzelhető a Földhöz hasonló méretű holdak létezése is, ezek kimutatásával kapcsolatban ld. Szabó (2006).



1.1. ábra. Bal oldali ábra: S-típusú mozgás, a bolygó az egyik csillag körül kering. Jobb oldali ábra: P-típusú mozgás, a bolygó egyszerre kerüli meg mind a két csillagot, vagyis a tömegközéppont (TKP) körül mozog.

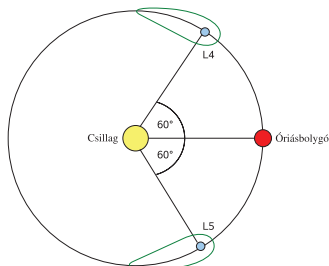
1.3. Egy harmadik test lehetséges pályái kettős rendszerekben

Mielőtt nekikezdenénk a tulajdonképpeni vizsgálatoknak, tisztázni kell, hogy milyen bolygópályák fordulhatnak elő egy két égitestből álló rendszerben, például egy kettőscsillag rendszerében.

A hagyományos égi mechanikai elrendezésben a bolygó egy csillag körül kering, és egy távoli, tömeggel rendelkező, pontszerű test perturbálja a mozgását. A kettőscsillagoknál ennek az az eset felel meg, hogy a bolygó az egyik csillag körül kering, és a másik csak perturbálja a mozgását (1.1. ábra). Az ilyen pályákat S-típusú pályáknak nevezzük, ahol az S betű a hold jelentésű angol *satellite* szóból származik. A napjainkig (2009. tavasz) a kettőscsillagok körül felfedezett bolygók ilyen, S-típusú pályákon keringenek. Ezeket a rendszereket többen is tanulmányozták, például Pilat-Lohinger (2002, 2003), Dvorak és mtsai (2003) és Pilat-Lohinger (2005).

Elméletileg azonban létezik egy másik pályatípus is, az úgynevezett P-típusú pályák (1.1. ábra). Az elnevezésben a P betű a bolygó jelentésű angol *planet* szóra utal. Az ilyen pályákon mozgó bolygók egyszerre kerülik meg mind a két csillagot. Ezt a pályatípust mostanáig egyedül csak a Plútó–Charon rendszerben és a PSR B1620-26 (Ford és mtsai, 2000) pulzár-fehér törpe kettősből sikerült megfigyelni. A P-típusú pályák stabilitását vizsgálták Pilat-Lohinger és mtsai (2003); Nagy és mtsai (2006, 2007).

A P- és S-típusú pályák közötti választóvonalat jelentik a két főkomponenssel 1:1-es középmozgás-rezonanciában levő trójai típusú pályák. Az ilyen pályákon mozgó égitestek a rendszer L_4 vagy L_5 Lagrange-pontja körül végeznek librációs mozgást (1.2. ábra). Ha pl. az L_4 körüli librációs mozgás amplitúdóját fokozatosan növeljük, a test egyszer csak kikerül a pont környezetéből, és keringése során immár az L_5 pontot is megkerüli. Az ilyen pályákat alakjuk miatt lópatkó pályáknak nevezzük. Ezek a pályák azonban nagyon instabilak, rendszerint csak néhány keringés az élettartamuk.



1.2. ábra. A trójai probléma modellje. Az ábrán zöld vonal jelzi az L_4 és L_5 Lagrange-pontok körüli librációs pályákat.

Jelenleg csak a Naprendszerben ismerünk trójai típusú pályán mozgó égitesteket. A legismertebb példa a Nap és a Jupiter L_4 , L_5 pontja körüli tartományokban található Trójai kisbolygók. Az előző alfejezetben kifejtett okok miatt érdekes, bár egyelőre csak elméleti lehetőség, hogy egy trójai típusú pályán mozgó égitest maga is bolygó méretű, azaz ún. trójai bolygó.

A kettős rendszerekbeli pályák további elméleti lehetőségeként jelennek meg az olyan különleges – és éppen ezért látványos – alakú pályák, amelyek nyolcasra hasonlítanak, vagy meg vannak csavarodva térben stb. Sajnos az ilyen pályák elméleti okokból nem lehetnek stabilak, így ezekkel a továbbiakban nem foglalkozunk.

Az S- és P-típusú, valamint a trójai jellegű pályák paraméterezésére az égi mechanikában megszokott módon oszkuláló pályaelemek használhatók. Ilyenkor a pályát egy pillanatnyi ellipszis-pályával közelítjük, és ennek a pályaelemeit adjuk meg. A valódi pálya alakját tekintve nem ellipszis alakú, de stabil esetben jól közelíthető egy ellipszissel, mivel ilyenkor a potenciál dipól és magasabb rendű tagjai kicsik.

A vizsgálatok során a hely és sebesség adatokból pályaelemeket kell számolni, illetve fordítva. Ehhez mindhárom típusú pálya esetén a megszokott összefüggések használhatóak, azzal a különbséggel, hogy P-típusú pályák esetén a tömeg helyére a kettős tagjai tömegének összegét kell írni. Az L_4 pont körüli librációs pályák esetén a térbeli kezdőhelyzet a probléma természetéből fakadóan adott, a sebességvektor kiszámítása azonban valamivel bonyolultabb a megszokottnál. A dolgozatban a továbbiakban a trójai és a P-típusú pályák stabilitásáról lesz szó.

2. fejezet

Naprendszerbeli kettős rendszerek vizsgálata

2.1. Bevezetés

Az égi mechanikában a kettős rendszereken olyan gravitációsan kötött rendszereket értünk, amelyek két, csak tömeggel rendelkező testből állnak. Az ilyen rendszerek mind lineárisan, mind nem-lineárisan stabilak. A valós égitesteknek természetesen van kiterjedése, és valamilyen anyagi összetétellel, illetve valamilyen alakkal jellemezhetőek. Mivel a valós anyagok nem tekinthetők merevnek, az egymás körül excentrikus pályán keringő égitestek alakja az időben változó gravitációs potenciál miatt szintén változni fog időben. Az alakváltozás energiavesztéssel jár, mivel a folyamat közben belső surlódás lép fel. Ennek, illetve az alak változása miatt a potenciálban létrejövő változásnak a következtében az égitestek pályája eltér a Kepler-féle pályáktól, és jogosan vetődik fel a mozgás stabilitásának kérdése. Mivel ez a hatás általában csak nagyon hosszú idő alatt okoz jelentős változást az égitestek pályájában, a továbbiakban elhanyagoljuk, az égitesteket pontszerűnek, egymás körüli pályájukat pedig egy időben állandó ellipszisnek tekintjük. Jelen munkában csak a tömeg nélküli harmadik test pályájának stabilitását vizsgáljuk.

A Naprendszerben számos olyan két tagból álló rendszer található, amelynek tagjai egymás Hill-szférájában¹ keringenek, és így a Nap perturbáló hatása nem tudja szétszakítani a rendszert, azaz a kettős stabilnak tekinthető. Ilyen stabil kettős rendszer a Föld és

1

$$R_{Hill} = a(1 - e)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{m}{3(m_{Nap} + m)}}, \quad (2.1)$$

ahol a az égitest Nap körüli pályájának fél nagytengelye, e a pálya excentricitása, m az égitest tömege és m_{Nap} a Nap tömege.

a Hold kettőse, vagy a Plútó és holdja, a Charon. Utóbbi rendszer érdekességét fokozza, hogy 2005-ben felfedeztek két, a rendszerhez tartozó kis holdacskát, amelyeknek tömege valószínűleg elhanyagolható a rendszer két nagyobb tagjához képest. Mivel a Plútó és a Charon tömege kevesebb, mint egy nagyságrenddel tér el egymástól, a rendszerben keringő további égitestek pályái erősen perturbáltak lehetnek, így jogosan merül fel az új holdak pályája stabilitásának kérdése. Érdekes probléma továbbá, hogy ezek a holdak vajon milyen folyamat eredményeképpen kerültek jelenlegi pályájukra. Vajon a Plútóhoz közeli pályán alakultak ki, és befogás révén váltak a rendszer tagjaivá? Vagy esetleg már eleve a Plútó körül jöttek létre? Ha égi mechanikai módszerekkel egyértelmű választ nem is adhatunk a keletkezésre vonatkozó kérdésekre, a pályaelemek terének vizsgálata alapján eldönthető, hogy melyik folyamatnak nagyobb a valószínűsége.

A Kuiper-övben, amelynek egyik legnagyobb tagja a Plútó, találunk további kettős rendszereket is, még ha ezek nem is érik el a Plútó és a Charon méretét. Az ezeket a rendszereket létrehozó folyamatokra napjainkra már több rivális elméletet is kidolgoztak, azonban mostanáig nem sikerült egyértelműen eldönteni, hogy melyik közülük a helyes. Megkönnyítheti a döntést, ha ezekben a rendszerekben is találunk kis holdacskákat, mivel néhány elmélet alapján erre jó esély van. Ehhez persze az is szükséges feltétel, hogy a rendszerekben létezzenek stabil pályák egy esetleges harmadik test számára.

A következő fejezetekben először megvizsgálom, hogy a Plútó és a Charon által alkotott kettős rendszerben a holdacskák pályája a pályaelem-tér stabil tartományába esik-e. Ebből, illetve a pályaelem-tér szerkezetéből megkísérlek következtetéseket levonni a keletkezésükre vonatkozóan. Ezután megvizsgálom néhány kettős Kuiper-objektum pályaelem-térét, tisztázandó, hogy létezhet-e ezekben a rendszerekben eddig még fel nem fedezett hold.

2.2. Módszerek

Az általunk vizsgált rendszer három, gravitációsan kötött testből áll, így szabadsági fokainak száma kilenc, a fázistér pedig ennek megfelelően 18 dimenziós. Ez csökkenthető ugyan a mozgásra vonatkozó első integrálok figyelembevételével, de így is nyolc marad. Mivel a mozgásegyenletek nem lineárisak, így a rendszer bizonyos körülmények között kaotikus viselkedést mutat. Míg reguláris esetben két, a fázistérben egymás közeléből induló pálya között a távolság az idővel egyenesen arányosan nő, kaotikus esetben exponenciálisan. A pályák dinamikai jellemzése ún. mozgás-indikátorokkal történhet. Elméletileg a legegyszerűbben az L Ljapunov-exponensek származtathatók:

$$L = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{d(t)}{d_0}}{t - t_0}, \quad (2.2)$$

ahol $d(t)$ a fázistérben kezdetben d_0 távolságra levő két pálya fázistérbeli távolsága t időpontban.

Belátható, hogy L reguláris pályára nulla, míg kaotikusra valamilyen pozitív értéket vesz fel. Minél kaotikusabb a rendszer, annál nagyobb. A gyakorlatban azonban a Ljapunov-exponens meghatározása nagyon számításigényes feladat, ezért gyorsabb, ám sokszor pontatlanabb módszereket is kifejlesztettek. Ilyenek például a gyors Ljapunov-indikátor (rövidítve FLI az angol Fast Lyapunov Indicator elnevezés alapján, Froeschlé és mtsai, 1997) vagy a SALI módszer (az angol Smaller Alignment Index elnevezésből, Skokos, 2001). A munkám során három módszert használtam, melyek ismertetése alább következik.

2.2.1. Relatív Ljapunov-indikátor

Ezt a módszert Sándor és mtsai (2000) alkalmazták először a trójai probléma tanulmányozására, majd később demonstrálták a módszer hatékonyságát 2D és 4D szimplektikus leképezésben, illetve Hamilton-rendszerekre is (Sándor és mtsai, 2004). A módszer előnye, hogy a segítségével extrém gyorsan el lehet dönteni a vizsgált pályákról, hogy regulárisak vagy kaotikusak.

Ismert, hogy a véges időre vett Ljapunov-indikátorok a legnagyobb Ljapunov-exponenshez konvergálnak. Ha a fázistér két közeli, de különböző pontjából indítunk egy-egy pályát, azokra a véges időre vett Ljapunov-indikátorok különböző sebességgel fognak konvergálni. A relatív Ljapunov-indikátor (RLI) a két, eredetileg közeli pálya Ljapunov-indikátora konvergenciájának a különbségét méri:

$$RLI(t) = \frac{1}{t} |LCI(t, x_0) - LCI(t, x_0 + \Delta x)|, \quad (2.3)$$

ahol x_0 a fázistérbeli kezdőpont, Δx a két pálya fázistérbeli kezdeti távolsága, LCI a karakterisztikus Ljapunov-indikátor.

A kaotikus és reguláris pályákra adódó RLI értékek között több nagyságrend a különbség a kaotikus pályák javára. Ez a tulajdonság segít elkülöníteni egymástól a két pályatípust.

2.2.2. Maximális excentricitás

Égi mechanikai rendszerekben a stabilitás vizsgálatára jól alkalmazható a maximális excentricitás módszere. Mint a módszer neve is mutatja, a pályák stabilitását az excentricitásuknak a vizsgált időtartam alatt elért legnagyobb értékével jellemzi. Minél nagyobb a maximális excentricitás (ME), annál kevésbé stabil a pálya. A módszer alkalmazásának határait jól jelzi, hogy például egycentrum-probléma esetén a nagy excentricitású, és emiatt egyben nagy maximális excentricitású pályák pont annyira stabilak, mint a kis excentricitású, tehát kis ME értékű pályák. Ezzel a módszerrel csak a pályák egymáshoz viszonyított stabilitásáról kapunk információt, a stabilitás mértékére csak áttételesen következtethetünk.

A módszer azon a tapasztalaton alapul, hogy az égi mechanikában használatos pálya-elemek közül a hatás jellegűek között az excentricitás a legérzékenyebb a perturbációkra. Ezen felül egy több tagból álló bolygórendszerben a nagyobb excentricitás egyúttal azt is jelenti, hogy a pálya nagyobb valószínűséggel metszi egy másik égitest pályáját. Az ilyen pályákon szoros megközelítések jöhetnek létre, amelyek jelentős mértékben módosítják a kistömegű égitestek pályáját. Közismert Naprendszerbeli példa az üstökösök esete, amelyeknek a pályája a nagyobb bolygók közelében elhaladva olyan nagy mértékben változhat minden egyes napközelség alkalmával, hogy sokszor keringési idő helyett érdemesebb a következő visszatérés várható idejéről beszélni. Így tehát a maximális excentricitás alkalmas a pálya stabilitásának jellemzésére.

A maximális excentricitás helyett néha célszerűbb a kezdeti excentricitástól való eltérését használni a stabilitás jellemzésére. Különösen igaz ez olyan esetekben, amikor az összehasonlítani kívánt pályák excentricitása már kezdetben is jelentősen különbözik. Nagyon elnyúlt pályák esetén arra is tekintettel kell lenni, hogy már egészen kis excentricitás-növekedés elég a rendszer széteséséhez vagy két tagjának ütközéséhez.

A módszer nagy előnye, hogy mivel nem igényli a rendszer mozgásegyenletein túl további differenciálegyenletek megoldását (ellentétben a Ljapunov-indikátorokon alapulókkal), rendkívül gyors és egyszerű. Hátránya, hogy csak áttételesen jellemzi a stabilitást. A sebességből fakadó előnye miatt érdemes más módszerek mellett kiegészítésképpen alkalmazni. A módszer több korábbi munkában is alkalmazásra került (Dvorak és mtsai, 2003, 2004; Süli és mtsai, 2005; Nagy és mtsai, 2006, 2007).

2.2.3. Excentricitások különbségének maximuma

A harmadik alkalmazott módszer az excentricitások különbségének maximumát (MDE) használja a stabilitás jellemzésére:

$$MDE(t) = \max |e(t, x_0) - e(t, x_0 + \Delta x)|, \quad (2.4)$$

ahol $e(t, x_0)$ a vizsgált pálya excentricitása t pillanatban, míg $e(t, x_0 + \Delta x)$ egy, a vizsgálthoz közeli pálya excentricitása az előbbivel egyező t pillanatban.

Ezt a módszert jelen munka elkészítéséhez fejlesztettem ki. Hasonlóan a már említett RLI-hez, ez a módszer is két közeli pálya viselkedését hasonlítja össze. Mivel kaotikus tartományban a két közeli pálya excentricitása nagyon különböző módon fejlődik, az excentricitások pillanatnyi értéke közötti különbség nagy lehet, még akkor is, ha az excentricitások átlagértéke, illetve az átlagértékek különbsége kicsi is marad.

A módszer előnye, hogy az MDE gyorsabban nő kaotikus pálya esetében, mint egy stabil esetében, míg például az ME növekedése viszonylag lassú. Így az MDE-vel már rövidebb idő alatt is megbízhatóan ki lehet mutatni egy pálya esetleges kaotikusságát. Hasonlóan az RLI-hez (és az ME-től eltérően) az MDE is nagyságrendekkel különbözik a kaotikus és a reguláris pályákra. A vizsgálatok során azt találtam, hogy ez a különbség elérheti a 4–7 nagyságrendet is a kaotikus pályák javára. Ugyanez a különbség az ME-kben mindössze 1-2 nagyságrend, míg az RLI esetében 10-12.

Hasonlóan az ME-hez, az MDE meghatározása sem igényel újabb differenciálegyenleteket, habár egy helyett két próbatest pályájának fejlődését kell követni. Ezzel együtt még mindig egyszerű és nagyon gyors. A módszer több munkában is alkalmazásra került (Nagy és mtsai, 2006, 2007)

2.2.4. Az alkalmazott módszerek összehasonlítása

A fentebb ismertetett módszereket használtam a Plútó–Charon rendszer, valamint néhány kettős Kuiper-objektum pályalemez-terének a vizsgálatára. A módszerek alkalmazhatóságát ellenőrizendő több számítást is végeztem. Minden rendszerre készítettem a főkomponensek keringési idejével, mint egységgel kifejezve 10^3 és 10^5 keringésre stabilitási térképet, majd összehasonlítottam ezeket.

Az alább bemutatásra kerülő ábrák készítése során átlagoltam bizonyos szögváltozókra. Ennek több oka is volt. Egyrészt szerettem volna biztosítani a korábbi hasonló munkákkal (Pilat-Lohinger és mtsai, 2003) való összehasonlíthatóságot, amelyekben a kezdeti közép-anomáliára átlagoltak. Másrészt a kezdeti közép-anomáliára való átlagolással láthatóvá

válnak azok a tartományok, ahol a stabilitás erősen függ a kezdőfeltételektől. Ez általában rezonanciák közelében fordul elő.

A kettős Kuiper-objektumok esetében munkánk célja, hogy eddig még ismeretlen holdak lehetséges előfordulásának helyét meghatározzuk. A holdak felfedezhetőségét jelentős mértékben befolyásolja a pálya fél nagytengelye és excentricitása, míg a kezdeti középánomália és a pericentrum argumentuma legfeljebb elhanyagolható mértékben. Ezért készítettem olyan ábrákat is, amelyeken nem a kezdeti középánomáliára, hanem a pericentrum kezdeti helyzetére átlagoltam. Az eltérő átlagolással készült ábrák összevetése jelzi, hogy mely tartományokban erős a stabilitás kezdőfeltételektől (jelen esetben a szögváltozók kezdeti értékeitől) való függése.

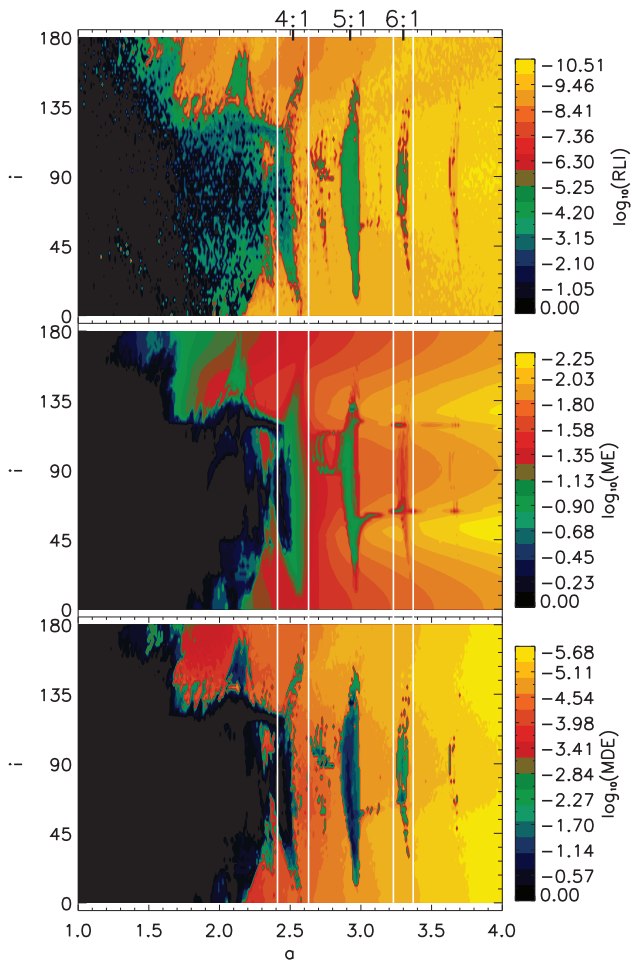
A fentieknek megfelelően a kezdeti középánomáliára való átlagolás esetén minden egyes, az a fél nagytengely, e excentricitás, i pályahajlás, ω pericentrum argumentuma, Ω felszállócsomó hossza pályaelemek által meghatározott pályán összesen öt kezdeti M középánomália értéket vettem fel. A kezdeti középánomáliák: $M = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$, és 180° . Ez összesen öt $I^{(M)}(a, e, i)$ indikátort eredményezett, ahol I a vizsgálati módszernek megfelelően RLI, ME vagy MDE. Ábrázolás előtt átlagoltam:

$$\bar{I}(a, e, i) = \frac{1}{5} \sum_M I^{(M)}(a, e, i). \quad (2.5)$$

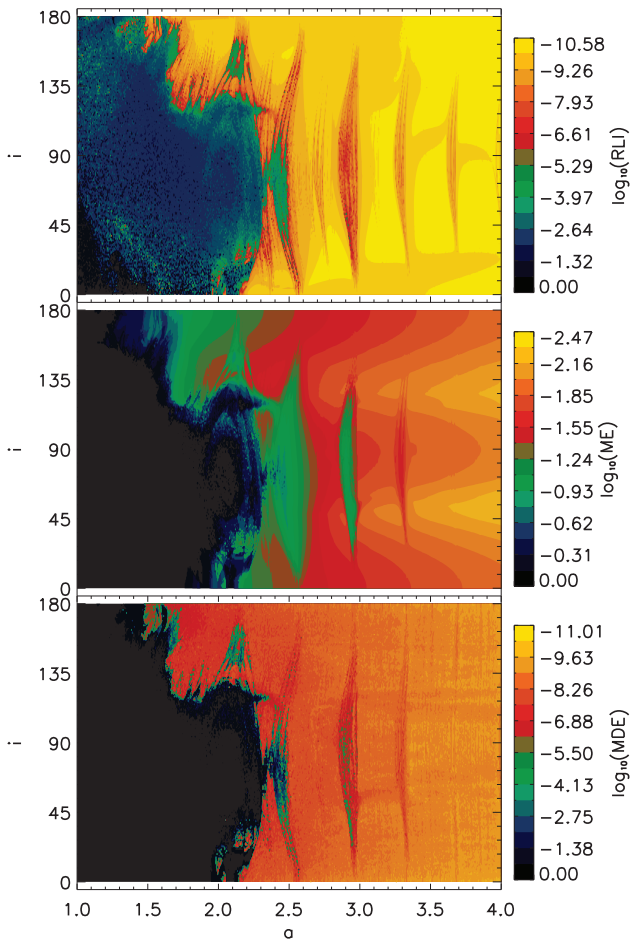
Az átlagolásnak ez a módja az RLI és az MDE esetében nagyobb súlyt ad egy pálya kaotikus viselkedésének, míg az ME esetén a kaotikus és a reguláris viselkedés egyforma súlyt kap. Ennek az az oka, hogy az RLI és az MDE esetén a kaotikus és a reguláris viselkedést jelző értékek között több nagyságrendnyi különbség van, míg ME esetén ezek lényegesen közelebb állnak egymáshoz.

A három módszer nem teljesen egyenértékű. Míg az RLI és az MDE a mikroszkópikus stabilitást jellemzi, addig az ME a makroszkópikusat. A különbség jól látható például a földpálya esetén. Tudjuk, hogy bolygónk pályájának fél nagytengelye, excentricitása nem változik jelentősebb mértékben, így kis ME érték adódik. Ugyanakkor a numerikus vizsgálatokból kiderült, hogy a pályára számolt Ljapunov-exponens nullánál nagyobb, bár nem sokkal (Sussman és Wisdom, 1992). A két eredmény között nincs kibékíthetetlen ellentmondás, csak arról van szó, hogy maga a pálya, ha alakját tekintve nem is változik jelentős mértékben (így pl. a Föld nem szökik el a Naprendszerből), de bolygónk pályamenti helyzetét tekintve kaotikus jelenségeket mutat.

A 2.1 ábrán a 10^5 Charon periódusra (a továbbiakban T_C) végzett számítások eredménye látható. Maga az ábra az a, i síkot mutatja, és a fekete szín jelzi a kaotikus viselkedést,



2.1. ábra. A Plútó–Charon rendszerbe helyezett próbatest pályájának stabilitását jellemző mennyiségek eloszlása az a, i síkon, $10^5 T_C$ időre vett integrálás után. A pálya kezdeti excentricitása $e = 0$ volt. A függőleges fehér vonalak a Nix és a Hydra dinamikailag lehetséges minimális és maximális pericentrum távolságot (Nix: 2,41 és 2,63 A ; Hydra: 3,23 és 3,37 A , ahol A a Charon pályájának fél nagytengelye) jelzik. Részletek a 2.3.3. fejezetben. Az ábra tetején a feliratok középmozgás rezonanciákat jelölnek.



2.2. ábra. A Plútó–Charon rendszerben $10^3 T_C$ időre végzett vizsgálat eredménye. A kezdőfeltételek megegyeznek a 2.1. ábránál használtakkal. A két ábrát összevetve elmondható, hogy az integrálási idő csökkentése nem okozott alapvető változást az eloszlás szerkezetében.

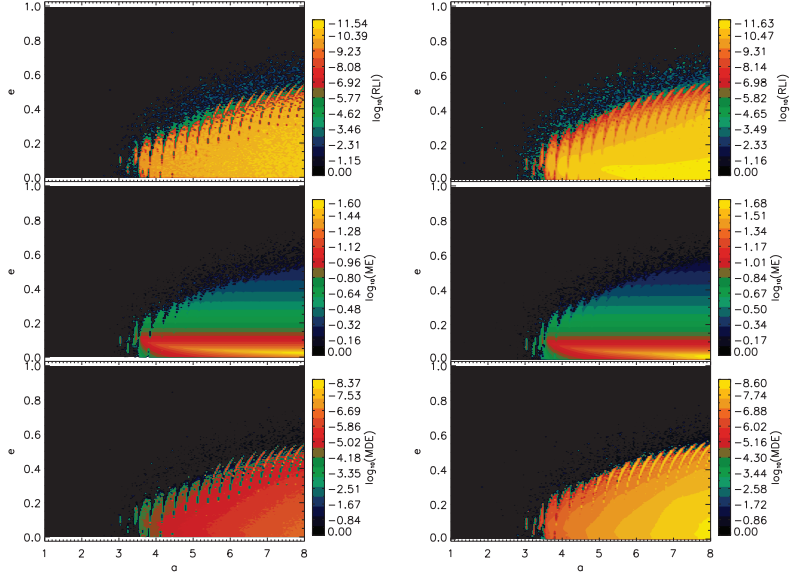
a többi szín pedig a regulárisat. A színek a zöldtől a sárgáig egyre növekvő stabilitást jelölnek. A szimuláció során $e = 0$ volt a próbatest kezdeti pályájának excentricitása.

Általában véve elmondható, hogy a három módszer hasonló globális szerkezetet jelez, ámbar vannak kisebb eltérések. Ezeknek az eltéréseknek a felbukkanása természetes velejárója annak, hogy a három módszer különböző mennyiségeken alapul. A felső ábrán látható RLI esetében a kaotikus régió határa nem olyan éles, mint a középső ábrán látható ME, vagy az alsón látható MDE esetében. Az RLI által szolgáltatott képen középtájon egy kékeszöld terület látszik, ahol jelen van a kaotikus viselkedés, de csak hosszabb időskálán nyilvánul meg. Egy hosszabb idejű integrálás során minden bizonnyal eltűnne ez a köztes stabilitású terület.

A kaotikus régió, amely $i = 0^\circ$ -nál $a = 2, 15$ A -ig tart (A a vizsgált kettős, tehát jelen esetben a Plútó–Charon rendszer egymás körüli pályájának fél nagytengelye), a pályahajlás növelésével kissé kiterjed. Ez a viselkedés hasonló ahhoz, amit $\mu = 0,5$ tömegparaméterre találtak Pilat-Lohinger és mtsai (2003) (vö. a hivatkozott cikk 2. ábrájával), továbbá Nagy és mtsai (2005). A kaotikus régió legnagyobb kiterjedését $i \approx 80^\circ$ -nál éri el, ahol összeolvad a 4:1 középmozgás rezonanciához tartozó kaotikus tartománnyal. Tovább növelve az inklinációt, a kaotikus tartomány enyhén csökken, majd $i \approx 135^\circ$ táján hirtelen összezsugorodik. Itt a stabil tartomány egészen $a = 1,65$ A -ig hatol le. A továbbiakban a tartomány határa szinte változatlan marad, és közel párhuzamosan fut az i tengellyel. Ez a szerkezet a 2.1. ábra mindhárom részábráján megjelenik.

A 2.1 ábra grafikonjain néhány kaotikus sziget látszik, amelyek az alábbi középmozgás rezonanciákhoz kapcsolódnak: 4:1 $a_r = 2,52$ A -nál, 5:1 $a_r = 2,92$ A -nál és 6:1 $a_r = 3,3$ A -nál. A legjelentősebb ezek közül az első, amely mint fentebb említettem, összekapcsolódik a belső nagy kaotikus tartománnyal is. Jól látható, hogy az elmélet alapján vártnak megfelelően a kaotikus szigetek mérete a rezonancia rendjének növelésével egyre csökken. Az átlagolt ábrán látható kaotikus szigetek nagyobb kiterjedésűek, mint bármely, az átlagoláshoz felhasznált M -re készült ábra esetében. A kiszélesedés azért jön létre, mert a rezonancia pontos a_r helye gyengén függ az M -től, valamint a pályahajlástól is. A 4:1 rezonancia esetében például a_r kezdetben csökken i növelésével. Ez a csökkenés nagyjából 80° -ig tart, a továbbiakban pedig növekszik, és $i \approx 160^\circ$ táján éri el az eredeti értékét. Az 5:1 és 6:1 rezonanciák esetén is megfigyelhető hasonló viselkedés, de ott kevésbé erőteljesen.

A 2.1. ábra egy 10^5 T_C időtartamú integrálás eredményét mutatja, míg a 2.2. ábra esetén ugyanez az időtartam mindössze 10^3 T_C , azaz századára csökkent. Minden, a 2.1. ábrán látott szerkezet megtalálható a rövidebb időre készített 2.2. ábrán is. A két ábrát



2.3. ábra. Az 1997 CQ29 kettős Kuiper-objektum rendszerének $10^5 T_b$ (balra) és $10^3 T_b$ (jobbra) időre vett integrálásával kapott eredmények összehasonlítása. Az ábrák készítése során eltekintettem az átlagolástól, mivel az összehasonlítás így is elvégezhető. ($i = 0$, $M = 0$)

összehasonlítva elmondható, hogy a Plútó–Charon rendszer kielégítő pontossággal mérhető fel a rövidebb, $10^3 T_C$ időtartamra való integrálással is.

A kettős Kuiper-objektumok esetén a középánómália (M) mellett a pericentrum argumentuma (ω) 5-5 kezdeti értékére is vizsgáltam a pályák stabilitását. A szögértékek ebben az esetben is 0° , 45° , 90° , 135° és 180° voltak, hasonlóan a középánomáliára való átlagoláshoz. Így öt-öt $I^{(M)}(a, e)$ illetve $I^{(\omega)}(a, e)$ értéket kaptam eredményül, ahol I a módszernek megfelelően RLI, ME vagy MDE. A különböző szögekre kapott $I^{(M)}$ illetve $I^{(\omega)}$ értékeket azután átlagoltam, majd ezek az átlagok kerültek ábrázolásra:

$$\bar{I}(a, e) = \frac{1}{5} \sum_M I^{(M)}(a, e), \quad \omega = 0^\circ, \quad (2.6)$$

$$\bar{I}(a, e) = \frac{1}{5} \sum_\omega I^{(\omega)}(a, e), \quad M = 0^\circ. \quad (2.7)$$

Természetesen most sem várjuk, hogy a három módszerrel kapott ábrák teljesen megegyezzenek.

A számítási idő ésszerű keretek között tartása végett a pályákat általában $10^3 T_b$ időtartamra integráltam, ahol T_b a vizsgált kettős keringési ideje. Ismét felmerül a kérdés, hogy ez elegendő-e a pályaelemek tere valódi szerkezetének feltérképezéséhez. Az eredmények megbízhatóságát $10^5 T_b$ időtartamra végzett integrálással ellenőriztem. A különböző időtartamú integrálások eredményeit a 2.3. ábrán lehet összevetni. A két ábrarész az a, e sikot mutatja. A fekete jelzi a kaotikus, a színes pedig a reguláris mozgást.

Mindenekelőtt ismét hasonlítsuk össze az alkalmazott módszerek által szolgáltatott eredményeket a tanulmányozott rendszerek esetére. Bár az összehasonlítást minden vizsgált kettős Kuiper-objektum esetére elvégeztem, itt most csak az 1997 CQ29 jelű kettőt mutatom be. A Plútó–Charon rendszerhez hasonlóan most is elmondhatjuk, hogy a különböző módszerek általában véve hasonló szerkezetet mutatnak, de kis részletekben vannak eltérések, a fentebb már kifejtett okok miatt.

A 2.3. ábra bal oldali része egy $10^5 T_b$ időre végzett szimuláció eredménye, míg a jobb oldali része $10^3 T_b$ időre végzett. A kettőt összevetve csak kis eltérések látszanak, amelyek a vizsgálat céljai szempontjából nem bírnak jelentőséggel. Ezért döntöttem úgy, hogy a Kuiper-objektumok esetében is megelégszem a pályák $10^3 T_b$ időtartamra vett integrálásával.

2.3. A Plútó holdrendszerének stabilitása

A Naprendszer akkor még kilencediknek tekintett bolygóját, a Plútót 1930-ban fedezte fel Tombaugh. Később, 1978-ban Christy egy holdat is talált a Plútó körül (Christy és Harrington, 1978), amely a Charon nevet kapta. Miután sikerült meghatározni a Charon tömegét is, kiderült, hogy az összemérhető a Plútóéval. Ez egyúttal azt is jelenti, hogy a rendszer tömegparamétere ($\mu = 0,130137$) is messze a legnagyobb volt a Naprendszer bolygó–hold párosait figyelembe véve. A további holdak keresésére tett erőfeszítések 2005-ben vezettek sikerre, amikor két kis holdat találtak a rendszerben (Stern és mtsai, 2005). Az új holdak az S/2005 P1, illetve S/2005 P2 jelet, majd később az előbbi a Hydra, az utóbbi a Nix nevet kapták. Ezek a holdak jóval kisebbek a rendszer másik két tagjánál, a Hydra átmérője 61–167 km, míg a Nixé 46–137 km. A pontos értékek megállapítása a holdak albedójának meghatározása után lesz lehetséges. Valószínűleg mindkét hold közel körpályán kering és pályasíkjuk egyezik a Charonéval. Keringési idejük rendre 38 illetve 25 nap.

A továbbiakban a Plútó–Charon rendszer pályaelem-terének dinamikai szerkezetéről lesz szó. A rendszer jelentőségét az adja, hogy ez az első olyan ismert Naprendszerbeli, tehát jól tanulmányozható kettős, amelyben a kisebb égitestek (a Nix és a Hydra) P-típusú pályákon keringenek.

2.3.1. A vizsgált rendszer és a kezdeti feltételek

A Plútó–Charon rendszer pályaelem-terének vizsgálatához a gyengébb perturbációkat (pl. Nap, bolygók) elhanyagolva a térbeli korlátozott háromtest-problémára egyszerűsítettük a feladatot. Integrálásra egy változó lépésközű Bulirsch–Stoer integrátor szolgált. A rendszer két nagytömegű tagja körpályáján mozgott, amelynek sugara a távolságegység (A). A pályasíkjuk a koordinátarendszer alapsíkja, míg az x tengelyt a két testet az integrálás kezdetén összekötő egyenes jelöli ki. Az origót a pályák paraméterezéséhez a tömegközéppontba rögzítettük, majd integráláshoz transzformáltuk a pályaelemekből számolt koordinátákat egy, az előbbivel egyező állású, de a Plútóhoz rögzített koordinátarendszerbe.

A tömeggel nem rendelkező próbatest (pl. Nix vagy Hydra) pályájának felszálló csomója kezdetben az x tengelyre esett, vagyis $\Omega = 0^\circ$. A pericentrum szintén az x tengelyre került, azaz $\omega = 0^\circ$. Habár a Nix és a Hydra pályasíkja egyezik a Charonéval, a nullától különböző pályahajlás stabilitásra gyakorolt hatása is a vizsgálat tárgyát képezte. Vagyis az eredmények jóval általánosabbak, azok nem csak a Plútó–Charon rendszer két kis holdjára alkalmazhatók, hanem a hasonló tömegparaméterű kettősök hold- vagy bolygórendszerére is, keringjenek azok tetszőleges inklinációjú pályán.

A vizsgálat a pályaelemek terében az alábbi tartományt lefedő pontrácsra terjedt ki (2.1. táblázat):

- a Plútó és a Charon közös tömegközéppontjától mért fél nagytengely $0,55\ A$ -tól $5\ A$ -ig, $\Delta a = 0,005\ A$ lépésközzel, ahol az A a Plútó és a Charon távolsága.
- az excentricitás 0 -tól $0,3$ -ig, $\Delta e = 0,05$, illetve egy esetben $\Delta e = 0,002$ lépésközzel
- a pályahajlás 0° és 180° között, $\Delta i = 1^\circ$ lépésközzel
- a kezdeti középánómália vizsgált értékei 0° , 45° , 90° , 135° , és 180°

A fenti pályaelemek olyan tömegközépponti koordinátarendszerben értendők, ahol a tömegközéppontban $m_1 + m_2$ tömeg van, tehát jelen esetben a Plútó és a Charon tömegének összege. A pályaelemekből a szokásos eljárásokkal lehet kiszámítani a tömegközéppontra vonatkoztatott hely- és sebességvektort. Ezeket a vektorokat célszerű egy

2.1. táblázat. Az első három sorban az eredeti, JD2452600.5 epochára vonatkozó pályaelemek láthatók (Buie és mtsai, 2005): a , e , i , ω , Ω és M a fél nagytengelyt, excentricitást, inklinációt, a pericentrum argumentumát, a felszálló csomó hosszát és a középánomáliát jelöli. Az utolsó oszlop a keringési idő, napokban mérve. A táblázat második fele a vizsgált P- és S-típusú pályák adatait mutatja a lépésközzel együtt.

Objektum	a [A]	e	i [°]	ω [°]	Ω [°]	M [°]	T [nap]
Charon	1,0	0	96,145	–	223,046	257,946	6,387
S/2005 P2	2,487	0,0023	96,18	352,86	223,14	267,14	25
S/2005 P1	3,31	0,0052	96,36	336,827	223,173	122,71	38
P-típus	0,55–5	0–0,3	0–180	0	0	0–180	
Δ	0,005	0,05	1	–	–	45	
S-típus	0,1–0,9	0–0,5	0	0	0	0	
Δ	0,008	0,005	–	–	–	–	

Plútóhoz rögzített viszonyítási rendszerbe transzformálni. Egy ilyen rendszer alkalmasabb a mozgásegyenletek integrálására, mivel ebben a rendszerben a Plútó mozgását leíró egyenleteket nem kell integrálni, ami jelentős gyorsulást eredményez.

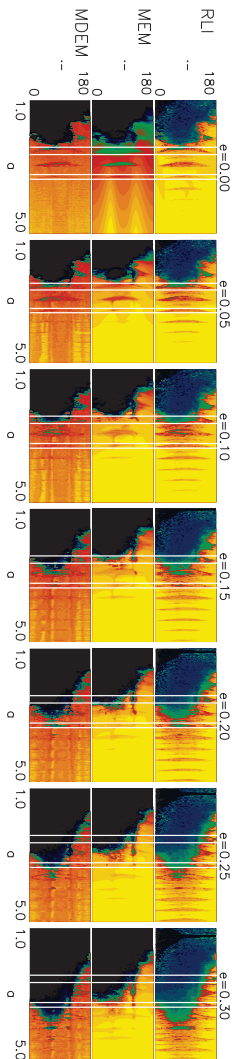
A P-típusú pályák mellett a vizsgálat tárgyát képezték mind a Plútó, mind a Charon körüli S-típusú pályák, a bolygó és holdja közötti tartomány stabilitásának megismerése végett. Ezeknek a pályáknak az adatai szintén a 2.1. táblázatban láthatók.

A közel 6 millió pályát 10^3 Charon-periódusra integráltuk.

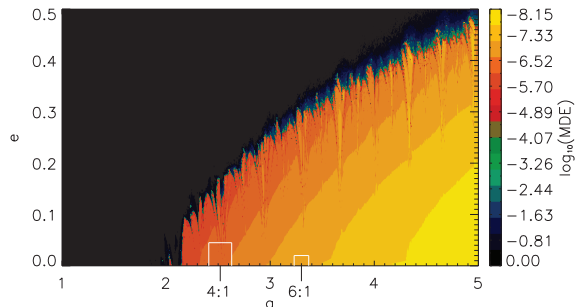
2.3.2. A Plútó–Charon rendszer pályaelem-tere

A próbatest kezdeti pályaelemeit az előző fejezetben leírt módon változtatva vizsgáltam a P-típusú pályák stabilitását (részletek a 2.1. táblázatban). A direkt irányú pályák ($i < 90^\circ$) mellett vizsgáltam a retrográd pályákat is, amelyekre $i > 90^\circ$. Az integrálási idő minden esetben $10^3 T_C$ volt. Az eredményeket a 2.4. ábra mutatja, ahol a különböző \bar{I} indikátorok a , i síkon vett eloszlását ábrázoltam, a próbatest pályájának különböző kezdeti e értékei esetére.

Általában véve elmondható, hogy az excentricitás növelésével a kaotikus tartomány növekszik. Ez különösen jól látszik az $i < 160^\circ$ pályahajlás esetén. Az is látható, hogy a növekedés mértéke erősen függ az i -től (Nagy és mtsai, 2006). A rezonanciáknál megjelenő kaotikus tartományok fokozatosan egybeolvadnak az egyre növekvő belső kaotikus tartománnyal. Szintén megfigyelhető, hogy a P-típusú pályák esetén a retrográd pályák stabilitása gyakorlatilag független az e -től (Nagy és mtsai, 2006). Ha az $i > 160^\circ$ tartományt nézzük, ott a stabil és kaotikus tartomány határa szinte állandó módon $a \approx 1,7$ A-nál húzódik (Nagy és mtsai, 2006).



2.4. ábra. Az $10^3 T_C$ időre végzett szimulációk eredményei. A számítások során $e = 0, \dots, 0,3$ volt. Az ábrák az a, i síkot mutatják. További részletek a szövegben.



2.5. ábra. Az a, e sík stabilitás-térképe. A fekete területek teljesen instabilak. Az új holdak a stabil tartományban vannak.

A pályaelem-tér Plútó és Charon közötti tartományba eső részének vizsgálatához $10^4 T_C$ időtartamra integráltuk a próbatest pályáját. Kíváncsiak voltunk mind a Plútó, mind a Charon körüli S-típusú pályák stabilitására. Az alkalmazott kezdeti feltételeket a 2.1. táblázat második felében foglaltam össze. A Plútó esetében az eredmények alapján nem létezik stabil pálya $0,5 A$ -nál nagyobb fél nagytengellyel (Nagy és mtsai, 2006). Ez a határ valamivel magasabb, mint a korábbi munkák (Holman és Wiegert, 1999) alapján várnánk. A Plútó–Charon rendszer $\mu = 0,130137$ tömegparaméteréhez a hivatkozott munkában $\mu = 0,1$ áll a legközelebb, ami kisebb, így azt várnák, hogy ők kapnak magasabb határt. Csakhogy míg jelen munkában egyetlen kezdeti középanomáliára ($M = 0^\circ$) számoltunk, a hivatkozott cikkben nyolcra, és az így kapott nyolc felső határ közül a legkisebbet tekintettük a stabil tartomány felső határának. A Charon körül nem sikerült stabil S-típusú pályát kimutatni.

2.3.3. A Nix és a Hydra pályájának stabilitása

A Plútó–Charon rendszer vizsgálatokor nem szabad megfeledezni a két újonnan felfedezett hold pályája stabilitásának kérdéséről. A vizsgálatok eredménye a 2.5. ábrán látható. Az ábra az a, e sík stabilitás-térképét mutatja. A készítésekor $10^3 T_C$ időn át követtem a próbatest pályáját, és MDE értékeket számoltam öt kezdeti M értékre, majd a fentebb írtaknak megfelelően átlagoltam M -re. Mivel a megfigyelések szerint a két hold pályásíkja egyezik a rendszer főkomponenseinek keringési síkjával, most csak $i = 0^\circ$, azaz a síkbeli esetet vizsgáltam. Mint látható, $a < 2,15 A$ esetén nincs stabil pálya, attól

fölfelé pedig a stabil tartomány kiterjedése az excentricitás nagyságától függ. A két hold ezen síkon vett lehetséges helyzetét a két téglalap jelzi. A magasságukat a holdak feltételezett pályáihoz közeli pályák $10^5 T_C$ időn át való integrálása során elért maximális excentricitások határozzák meg. Az excentricitás az integrálás kezdetén nulla volt. Azt találtam, hogy $ME_{max} = 0,045$ a Nix, és $ME_{max} = 0,02$ a Hydra esetén. Ezek alapján a pericentrum lehetséges minimális távolsága $r_p = a(1 - ME_{max})$, a maximális pedig $r_a = a(1 + ME_{max})$. Ez számszerűsítve a Nix esetén 2,41 és 2,63 A távolságot jelent, míg a Hydra esetében 3,23 és 3,37 A -t (Nagy és mtsai, 2006). Ezek határozzák meg a két-két függőleges vonal közti távolságot a 2.5. ábrán, valamint a 2.1. és a 2.4. ábrán is.

A 2.5. ábrán jól látható, hogy a két holdra meghatározott pályaelemek a pályaelem-tér stabil tartományába esnek (Nagy és mtsai, 2006). Az is látszik, hogy amennyiben a Nix és a Hydra valóban a Charon pályasíkjában keringenek, akkor pályájuk excentricitása nem lehet nagyobb, mint 0,17 illetve 0,31 (Nagy és mtsai, 2006). A Nix pályájának fél nagytengelye nagyon közel esik a 4:1, míg a Hydráé a 6:1 középmozgás rezonanciához. Ezek a rezonanciák az ábrákba berajzolt téglalapok belsejébe esnek. Feltehető, hogy a két hold rezonáns pályákon mozog, de a kérdés eldöntéséhez pontosabb pályaelemekre, és így további észlelésekre volna szükség. Amennyiben valóban (esetleg többszörösen is) rezonáns rendszerről van szó, akkor a rendszer dinamikájának alaposabb megismerése további, hosszabb időre vett numerikus vizsgálatokat igényel.

2.3.4. A Nix és a Hydra eredetéről

Mostanáig a Plútó–Charon rendszer az egyetlen olyan ismert kettős rendszer a Naprendszerben, amely viszonylag nagy tömegparaméterrel rendelkezik, és ismert égitestek keringenek körülöttük P-típusú pályákon. Ez a körülmény, és az, hogy a kettőscsillagok igen nagy arányban fordulnak elő a csillagok között, különösen fontossá teszi a P-típusú pályák stabilitásának vizsgálatát kettősökben, így a Plútó–Charon rendszer vizsgálatát is. Az általunk végzett vizsgálatokból is kiderült, hogy a stabil tartomány szélesebb a retrográd tartományban ($i > 90^\circ$), mint a direktben ($i < 90^\circ$). Az excentricitás növelésével a kaotikus tartomány kiterjed, ami egy felső korlát megjelenését eredményezi a holdak pályájára (Nagy és mtsai, 2006). A jelenlegi fél nagytengelyek mellett a Nix pályájának excentricitása nem lehet nagyobb 0,17-nél, illetve a Hydra esetében 0,31-nél (Nagy és mtsai, 2006). Mivel $a = 2,15 A$ alatt minden pálya instabil, függetlenül az excentricitástól, ennél kisebb fél nagytengelyű pályán keringő holdak létezése kizárható (Nagy és mtsai, 2006).

Stern és mtsai (2005) szerint a Hydrát és a Nixet a Charonnal együtt valószínűleg egy nagyobb testnek a Plútóval való ütközése hozhatta létre. Az ütközés során nagymennyiségű anyag dobódott ki, amiből összeállt a Plútó körül a három égitest. Ezt a feltevést arra alapozzák a szerzők, hogy a Hydra és a Nix a Plútóhoz és a Charonhoz közel kering, pályájuk majdnem kör, keringési síkjuk egyezik a Charon pályasíkjával, és közel vannak egy-egy magasabb rendű középmozgás rezonanciához.

A saját eredmények tükrében szintén valószínűtlen, hogy ezek befogott holdak lennének. Mivel a retrográd tartományban nagyobb a stabil terület mint a direkt tartományban, a befogott holdak között gyakoribb a retrográd pálya. A jelenlegi vagy ahhoz közeli pályára való befogás nem történhet túl nagy excentricitással ($e > 0,17$ és $0,31$ a Nix illetve a Hydra mostani fél nagytengelyét figyelembe véve), mivel az ilyen pályák már $10^3 T_C$ időskálán is instabillá válnak (Nagy és mtsai, 2006). Továbbá, ha excentrikus pályára kerültek volna a befogáskor, csak a Naprendszer koránál is sokkal több idő elteltével vált volna körré a pályájuk (Stern és mtsai, 2005).

Elfogadva, hogy a Nix és a Hydra a Charonnal együtt keletkezett, feltehetjük, hogy további holdak is létrejöttek a rendszerben a kidobott anyagból. Csakhogy a 2.4. ábrán látható, hogy $a \approx 2 A$ esetén minden pályahajlás és excentricitás esetén instabillá válnak a pályák már rövid idő alatt is. Ez azt jelenti, hogy a kidobott anyag nagyrészt rövid idő alatt be kellett gyűjtse vagy a Plútó vagy a Charon. Vagyis jelenleg nem megoldott probléma, hogy a Nix és a Hydra hogyan fejlődött a mai pályájára.

Felmerül annak a lehetősége, hogy a Nix és a Hydra folyamatos, véletlenszerű ütközése kisméretű Kuiper-objektumokkal egy időszakos jellegű törmelékcorongot hozhat létre a Plútó körül a két hold pályája közti tartományban (Stern és mtsai, 2005). Ha ezek a piszkos jégből álló részecskék a holdakkal azonos síkban keringenek, ezek excentricitása sem lehet nagyobb mint $0,17$ - $0,31$, a pálya fél nagytengelyétől függően (2.5. ábra).

A Nix és a Hydra létezése és pályájuk stabilitása jelzi, hogy létezhet az exobolygók egy új osztálya, amelynek képviselői P-típusú pályán keringenek kettőscsillagok körül (Nagy és mtsai, 2006). Ezeknek a rendszereknek sokkal jobban kell hasonlítaniuk a Naprendszerhez, mint a jelenleg ismert exobolygórendszerek, amennyiben a rendszerek belső vidékein nem létezhet égitest nagy excentricitású pályán (Nagy és mtsai, 2006). Az ilyen pályákon keringő bolygók felszínén kiegyensúlyozottabb hőmérsékleti viszonyok uralkodhatnak, ami előnyösen befolyásolhatja a lakhatóságukat.

2.4. Kettős Kuiper-objektumok dinamikája

A Plútó és a Charon alkotta kettős rendszerben talált két hold, a Nix és a Hydra pályájának stabilitása felveti annak lehetőségét, hogy a Naprendszer más kettősei, például a kettős Kuiper-objektumok körül is létezhetnek kisméretű holdak. A következőkben ennek a lehetőségét vizsgáljuk meg.

Az első Kuiper-övbeli égitestet, az 1992 QB1-et Jewitt és Luu fedezte fel 1992-ben (Jewitt és Luu, 1992). A további, egyre alaposabb kutatások során mára több, mint 1000 hasonló égitest vált ismertté. Ezek alapján ma már széles körben elfogadottá vált, hogy a Neptunuszon túl hatalmas számú kisméretű ún. elsődleges égitest kering. A becslések szerint a számuk, ha csak a 100 km-nél nagyobb átmérőjűeket számítjuk, akkor is legkevesebb százezerre rúg, a kisebbekből pedig ennél nagyságrendekkel is több lehet. Ezeket az égitesteket szokás Neptunuszon túli vagy Kuiper-objektumoknak nevezni (angol nevük alapján TNO-k illetve KBO-k). Ezeknek az égitesteknek nagyrésze az ekliptika körül egy vékony sávban tömörül, amely nagyjából a Neptunusz pályájánál kezdődik, és akár több száz csillagászati egység távolságig is terjedhet. Ezt az övet gyakran Edgeworth-Kuiper-övnek (EKB) nevezik a létezését 1943-ban illetve 1951-ben előre jelező Edgeworth (Edgeworth, 1943) és Kuiper (Kuiper, 1951) után. Ők arra alapozták feltevésüket, hogy a Naprendszer ősanyaga által alkotott korong külső sugara nagyobb lehetett, mint a legkülső bolygók pályájának fél nagytengelye. Újabb elképzelések szerint a nagy külső bolygók kialakulása után azok perturbáló hatása a korong anyagának pályájukon kívül eső részét a Naptól elfelé mozgatta, ami szintén hozzájárulhatott a Kuiper-öv létrejöttéhez.

A Kuiper-öv léte és tanulmányozása a Naprendszer kialakulásának vizsgálata szempontjából bír nagy jelentőséggel. Feltételezhető ugyanis, hogy az ott található égitestek anyaga a Naprendszer ősanyagának kezdeti akkréciójából maradt fent, és azóta legfeljebb csak minimális változásokon ment át. Így ezeknek a kémiai összetétele őrzi a Naprendszert szülő ősi porkorong összetételét (ezért gondoljuk ezeket elsődleges égitesteknek), szemben a Naphoz közelebb keringő égitestekkel, amelyeknek anyaga a magasabb hőmérséklet miatt jelentős kémiai átalakuláson esett át.

A protoplanetáris korong külső része lényegesen ritkább volt, mint a belső, ezért a csomósodása is lényegesen lassabban ment végbe. A térség belsőbb részén még elegendő idő állt rendelkezésre, hogy a porból tíz-száz vagy akár ezer kilométeres testek épüljenek fel, mielőtt a Nap sugárnyomása ki nem söpörte a kisebb méretű porszemcséket. Ez magyarázza, hogy a Naprendszer ezen tartományában nem egy-két nagyobb bolygót találunk, hanem rengeteg kicsit. Napjainkban széles körben elfogadott, hogy ezekből a kis égitestekből lesznek különböző perturbációk hatására a rövid periódusú üstökösök, mint

ahogyan a hosszú periódusúak az Oort-felhő objektumaiból. Numerikus vizsgálatok során a Neptunuszon túl stabil és instabil tartományok váltakozását mutatták ki Holman és Wisdom (1993), valamint Levison és Duncan (1993), ami azt jelzi, hogy a fenti elképzelés helytálló lehet.

Nagyon sok TNO képez kettős rendszert, ami alapvető fontosságú tény a külső Naprendszer fejlődésének és szerkezetének megértése szempontjából. A kettős rendszerekre mindig különös figyelmet fordítanak a csillagászok, mert esetükben lehetséges a tömegük meghatározása az egymás körüli mozgásuk alapján. De nem csak a tömeg meghatározása egyszerűbb, az egymás előtti átvonulásaikból becsülhető a méretük és így a sűrűségük is. A csillagokról is tudjuk, hogy nagyrészüik gravitációsan kötött csoportokat képez, főként kettőscsillagokat. De a Naprendszerben is találunk további kettősöket. A bolygók között kettősnek tekinthető a Föld–Hold rendszer. A fő kisbolygó övben is jelentős számú kettős található. Ez utóbbiak tömegparamétere általában a $10^{-4} - 10^{-3}$ tartományba esik, így inkább holddal rendelkező kisbolygók mint kettősök, bár fizikailag nincs különbség a két kategória között.

Az első kettős Kuiper-objektumot 2002-ben fedezték fel (Veillet és mtsai, 2002), ámbar akár a Plútó–Charon rendszert is tarthatnánk az első kettős Kuiper-objektumnak. A Plútó–Charon rendszer nagy impulzusmomentuma miatt merült fel az az elképzelés, hogy a rendszer kialakulásához egy óriási ütközés vezetett (McKinnon, 1989). Az akkor még csak feltételezett kisebb kettős Kuiper-objektumok esetén is mindenki hasonló keletkezési mechanizmust feltételezett, és így közel kör alakú, viszonylag kis fél nagytengelyű pályákon keringő holdakat. Éppen ezért okozott nagy meglepetést az 1998 WW31 körül talált hold. Kiderült ugyanis, hogy a pályája erősen elnyúlt, és a fél nagytengelye hozzávetőlegesen háromszorosa a Charon pálya fél nagytengelyének (2.2. táblázat).

Napjainkban már több, mint húsz kettős Kuiper-objektum ismert, Deep Ecliptic Survey (Millis és mtsai, 2002; Elliot és mtsai, 2005), és Hubble Space Telescope (Stephens és Noll, 2006), de a kettősök arányának megbecslésére végzett észlelések alapján valószínűsíthető, hogy arányuk akár a 10%-ot is elérheti (Burns, 2004). A rendszerek jellemzőit a főöbéli kettősökével összehasonlítva szembeötlő különbségeket fedezhetünk fel: a tömegparaméter nagyságrendekkel nagyobb ($10^{-2} - 10^{-1}$), sokkal nagyobb a szeparáció, akárcsak egymás körüli keringési pályájuk excentricitása. A fél nagytengely itt most nem feltétlenül a kilométerben mért értékre vonatkozik, hanem az elsődleges komponens sugarában, mint egységben kifejezetre. Ilyen egységeket használva a kettős Kuiper-objektumok esetén a fél nagytengely 50 és 500 között változik, míg a fő kisbolygó övben 10 körül ingadozik. Ez azt sugallja, hogy a két csoport keletkezési mechanizmusa is teljesen más. Jelenleg

öt különböző elképzelés létezik a kettős Kuiper-objektumok keletkezésére, és a megfigyelt pályaelemeik magyarázatára (Weidenschilling, 2002; Goldreich és mtsai, 2002; Funato és mtsai, 2004; Astakhov és mtsai, 2005)².

A kettős Kuiper-objektumok kialakulására vonatkozó elméletek azonban nem tudják megmagyarázni a Plútó–Charon rendszer jellemzőit, azt teljesen más mechanizmusnak kellett létrehoznia. A két kis hold felfedezése (Stern és mtsai, 2005) ráadásul csak fokozta a rendszer különlegességét. A Plútón túl napjainkban sikerült kimutatni néhány Plútó-méretű Kuiper-objektumot is. Ezeknek a rendszereknek holdak utáni alapos átvizsgálása segíthet eldönteni, hogy a Plútó valóban egyedi eset-e.

A Kuiper-objektumok dinamikájának és fizikai jellemzőinek vizsgálata jelenleg gyorsan fejlődő területe a csillagászatnak. A Kuiper-objektumok hosszú idejű dinamikáját is vizsgálták néhány tanulmányban (Torbett és Smoluchowski, 1990; Holman és Wisdom, 1993; Levison és Duncan, 1993; Duncan és mtsai, 1995; Morbidelli és mtsai, 1995; Duncan és Levison, 1997), amelyek fényt derítettek az őv időbeli fejlődésére és a rövid periódusú üstökösök keletkezésére. A kettős Kuiper-objektumok felfedezése új lehetőséget teremtett a Kuiper-öv kutatásában: a kettős Kuiper-objektumok fázisterének tanulmányozását. A kettősök keletkezésére vonatkozó elméletek alapján feltehető, hogy ezeknek a rendszereknek egy része gravitációsan kötött multiplet, hasonlóan a Plútó–Charon rendszerhez. A továbbiakban ennek a lehetőségéről lesz szó néhány kiválasztott rendszerre vonatkozóan, amelyeknek az adatait a 2.2. táblázat tartalmazza. Ehhez fel kell térképezni a kettősök körül a pályaelemek paraméter-terében a stabilitási viszonyokat. A vizsgálat azért nem terjed ki minden ismert kettős Kuiper-objektumra, mert sokszor szinte csak a kettősség tényét sikerült megállapítani, és a rendszer pontosabb adatai (pl. az egymás körüli pálya fél nagytengelye) jelenleg nem ismertek. Hasonló vizsgálatok történtek a Plútó–Charon rendszerre is (Nagy és mtsai, 2006).

²Goldreich és mtsai (2002) két lehetséges mechanizmust írnak le tanulmányukban.

2.2. táblázat. A vizsgálat tárgyát képező kettős Kuiper-objektumok néhány fontosabb adata: a_p jelöli a Nap körüli keringési pálya fél nagytengelyét, m_p a kettős elsődleges komponensének tömege, m_s a kettős másodlagos komponensének tömege, d a másodlagos komponens átmérője, a_s a kettős egymás körüli keringési pályájának fél nagytengelye, e_s az egymás körüli pálya excentricitása (ahol nem ismert, ott $e_s = 0.0$ excentricitással számoltam), T pedig az egymás körüli keringés periódusa.

Főkomponens	a_p [CsE]	m_p [kg]	Másodlagos komponens	m_s [kg]	d_s [km]	a_s [km]	e_s	T_s [d]	Család
1997 CQ29	45.34	2.7×10^{17}	S/2001 (1997 CQ29) 1	1.5×10^{17}	66	8010	0.45	312	Cubewano
1998 SM65	47.82	6.78×10^{18}	S/2001 (26308) 1	4.84×10^{17}	39	11310	? (0)	130	?
1998 WW31	44.95	1.7×10^{18}	S/2000 (1998 WW31) 1	1.0×10^{18}	120	22300	0.817	574	Cubewano
1999 RZ253	43.258	2.39×10^{18}	S/2003 (66652) 1	1.34×10^{18}	137	4660	0.46	46.263	Cubewano
1999 TC36	39.53	1.39×10^{19}	S/2001 (47171) 1	6.62×10^{17}	54	7640	? (0)	50.38	Plutino
2000 CF105	44.2	3.5×10^{18}	S/2002 (2000 CF105) 1	8.97×10^{17}	106	23000	? (0)	470?	Cubewano
2001 QT297	44.8	3.2×10^{18}	S/2001 (88611) 1	1.23×10^{18}	136	31409	0.31	876	Cubewano

2.3. táblázat. A vizsgált kettős Kuiper-objektumok μ tömegparamétere, hatássférájuk sugara (R_I), a vizsgált tartomány fél nagytengelyének maximuma (a), és az excentricitás csökkenésének karakterisztikus ideje (τ). Viszonyításképpen feltüntettem a táblázatban a Plútó-Charon rendszer megfelelő adatait is.

Kettős	μ	R_I [km] ($[A]$)	a_{max} [A]	τ
Pluto-Charon	0,130	7947421 (405)	–	3×10^6
1997 CQ29	0,357	57740 (7,21)	8	$1,1 \times 10^{13}$
1998 SM165	0,067	190440 (16,84)	17	$4,6 \times 10^{13}$
1998 WW31	0,370	120490 (5,40)	6	$1,8 \times 10^{14}$
1999 RZ253	0,359	131200 (28,15)	29	$2,8 \times 10^9$
1999 TC36	0,045	207920 (27,21)	28	$3,3 \times 10^{11}$
2000 CF105	0,204	144000 (6,26)	7	$1,4 \times 10^{14}$
2001 QT297	0,278	146400 (4,66)	5	$5,3 \times 10^{14}$

2.4.1. A vizsgált rendszer és a kezdeti feltételek

A rendszerek pályaelemtere szerkezetének vizsgálatát elsősorban a síkbeli elliptikus korlátozott háromtest probléma keretei közt végeztem, bár történt néhány vizsgálat a pályahajlás hatásának kimutatására is. A dimenziótlantított mozgásegyenletek integrálásához egy változó lépésközű Bulirsch-Stoer integrátort használtam. A két elsődleges komponens egymás körüli pályájának fél nagytengelye volt az A távolságegység. A koordinátarendszer főkiját a kettős egymás körüli pályájának síkja jelölte ki, az x tengely irányát pedig a két testet az integrálás kezdetén összekötő egyenes.

A pályaelemek terének és a lehetséges holdpályák stabilitásának vizsgálatához a próbatest kezdeti pályaelemeit az alábbiak szerint változtattam:

- Az a fél nagytengelyt a rendszer tömegközéppontjától mértem, és 1 A -tól kezdve növeltem a hatássféra sugáráig (R_I), amely az alábbi módon számolható:

$$R_I = a_p \left(\frac{m_p + m_s}{m_{Nap}} \right)^{\frac{2}{5}}, \quad (2.8)$$

ahol a_p a rendszer Nap körüli pályájának fél nagytengelye, m_p az elsődleges komponens tömege, m_s a másodlagos komponens tömege, m_{Nap} pedig a Nap tömege. A hatássféra használatát a maximális fél nagytengelyre az indokolja, hogy ezen belül a Nap által okozott perturbációk elhanyagolhatók. Ha kéttest-problémát vizsgálnánk, ezen a tartományon belül a pályát alapvetően kepleri ellipszisnek lehetne tekinteni. (Jelenleg, mivel egy kettős rendszer körül vizsgáljuk a próbatest pályáját, az ellipszis csak első közelítésben állja meg a helyét.) Ez a tartomány szűkebb, mint

a Hill-szféra. A lépésköz $\Delta a = 0,04 A$ volt.

- A vizsgált pályák kezdeti excentricitása 0-tól változott 0,85-ig, $\Delta e = 0,005$ lépésközzel.
- A pericentrum argumentuma (ω) és a kezdeti középánómia (M) $0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$ és 180° volt.
- A pályahajlást 0° és 60° között változtattam 15° lépésközzel.

A fenti pályaelemek olyan tömegközépponti koordinátarendszerben értendők, amelynek a középpontjában $m_p + m_s$ tömeg van. A pályaelemekből a szokásos összefüggések segítségével számoltam ki a kezdeti hely- és sebességvektort, majd az elsődleges komponenshez rögzített rendszerbe transzformáltam azokat. A mozgásegyenletek integrálása ez utóbbi rendszerben történt (lásd 2.3. táblázatot is).

Összesen közel 4,2 millió pályát integráltam 10^3 kettős periódusra (T_b).

2.4.2. Az excentricitás csökkenés karakterisztikus ideje

A kettősök kialakulását magyarázó Weidenschilling-féle elmélet (Weidenschilling, 2002) szerint két planetezimálnak egy nagyobb Kuiper-objektum Hill-szférájában bekövetkező ütközése után a két test összetapadhat, amennyiben kellően rugalmatlan volt az ütközés, és a nagyobb körüli pályán maradhat. A Goldreich-féle elképzelés (Goldreich és mtsai, 2002) egy ideiglenes gravitációs befogást feltételez, majd ezt követően stabilizációs folyamatokat. A stabilizációt okozhatja kisebb, 10 km alatti méretű égitestekkel való találkozás, vagy egy nagyobbval való egyszeri találkozás, ami elviheti a felesleges energiát. Az Astakhov-féle káosz segítette befogási mechanizmus (Astakhov és mtsai, 2005) első lépéseként egy laza, átmeneti kettős jön létre. Ezt követően kis égitestekkel való találkozások sorozata stabilizálja a kettőst. Ezek hatására a fél nagytengely folyamatosan csökken, aminek következtében egy szoros rendszer alakul ki. A fenti elméletek alapján a kettősök excentricitása jellemzően 0,2 és 1 között kell legyen, az egyes mechanizmusok gyakoriságától függően.

Az egymás körüli pálya további fejlődésében lényeges szerepet kaphat az excentricitás csökkenésének karakterisztikus ideje (τ), amely megadja, hogy mennyi idő alatt csökken az excentricitás az e -ed részére. Ez az alábbi módon becsülhető:

$$\tau = \left| \frac{1}{e} \frac{de}{dt} \right|^{-1} = \frac{2Q}{21(m_p/m_s)n(R_s/a_s)^5 k_2}, \quad (2.9)$$

ahol Q a másodlagos komponensre vonatkozó disszipációs együttható, n a középmozgás, a_s a másodlagos komponens pályájának fél nagytengelye, R_s a másodlagos komponens sugara és k_2 a másodfokú potenciál Love-szám. Az összefüggésnek a vizsgált rendszerekre való alkalmazásához meg kell becsülni a Q -t és a k_2 -t. Jégből és fagyott gázokból álló égitestekre a $Q = 100$ értéket tartják jellemzőnek, a k_2 -re pedig 0,055-t merev jég esetén. A körösödési időket a 2.3. táblázat mutatja.

A 2.3. táblázat alapján τ jellemzően $10^{13} - 10^{14}$ év, azaz jóval nagyobb, mint a két közeli találkozás közti időtartam várható értéke, ami néhány millió év (Goldreich és mtsai, 2002) sőt, ezek az időtartamok a Naprendszer koránál is lényegesen nagyobbak. Kivételt képez az 1999 RZ253 jelű rendszer, amelyre 2,8 milliárd év adódik, ámbr ez is lényegesen több az említett néhány millió évnél. Ezek az értékek azt is jelzik, hogy a kettős Kuiper-objektumok megfigyelt excentricitása lényegében változatlan vagy a befogás, vagy az utolsó gravitációs szórási esemény óta.

2.4.3. Az a, e sík általános jellemzése

A kettős Kuiper-objektumok körüli pályák stabilitását a próbatest pályaelemeinek a fentebb leírt módon való változtatásával vizsgáltam, az egyes pályák fejlődését pedig $10^3 T_b$ időn át követtem. A 2.6, 2.7, 2.8, 2.9, 2.10, 2.11. és 2.12. ábrák bal oldalán az M -re, jobb oldalán pedig az ω -ra való átlagolás eredménye látható. Az eredmények általában véve azt mutatják, hogy az excentricitás növelésével növekszik a kaotikus tartomány kiterjedése. Az M -re és ω -ra végzett átlagolást összehasonlítva megállapítható, hogy a stabil tartomány alsó határa az utóbbinál valamivel távolabb húzódik, valamint hogy a stabil tartomány burkológörbéjének érintője nagyobb meredekségű az M -re, mint az ω -ra való átlagolás esetén. Ezek az eltérések azonban általában nem túl jelentősek, a két különböző szögváltozóra való átlagolás gyakorlatilag azonos eredményt szolgáltat. Kivételt képez talán a 2001 QT297 (2.12. ábra), ahol annyira kicsi a hatásszféra, hogy a stabil tartomány alsó határának kifelé tolódása már jelentősnek mondható mértékben csökkenti a stabil tartomány területét. Általában viszont a kettősök excentricitása és tömegparamétere ennél lényegesen erősebben befolyásolja mind a stabil terület nagyságát, mind az alakját. A pályahajlást változtatva azt tapasztaltam, hogy csak minimális mértékben változtatja a pályák stabilitását. A vizsgált legnagyobb pályahajlásig ($i = 60^\circ$) a stabil terület nagysága alig csökkent.

Az átlagolás nélkül, $10^5 T_b$ -re végzett vizsgálatok azt mutatják, hogy a stabil terület aránya csökken a $10^3 T_b$ időre kapotthoz képest, de a két eredmény közötti különbség csak minimális (2.3. ábra). Az átlagolás nélküli esetekben a stabil tartományba mélyen benyúló

kaotikus sávok láthatók, amelyek magasrendű rezonanciákkal kapcsolatosak. A rezonancia rendjének növelésével egyre magasabb excentricitásoknál jelennek meg, és enyésznek el ezek a kaotikus sávok. Az ω -ra illetve M -re való átlagolás során ez a sávos szerkezet elhalványul a rezonanciák ω -tól illetve M -től való függése miatt.

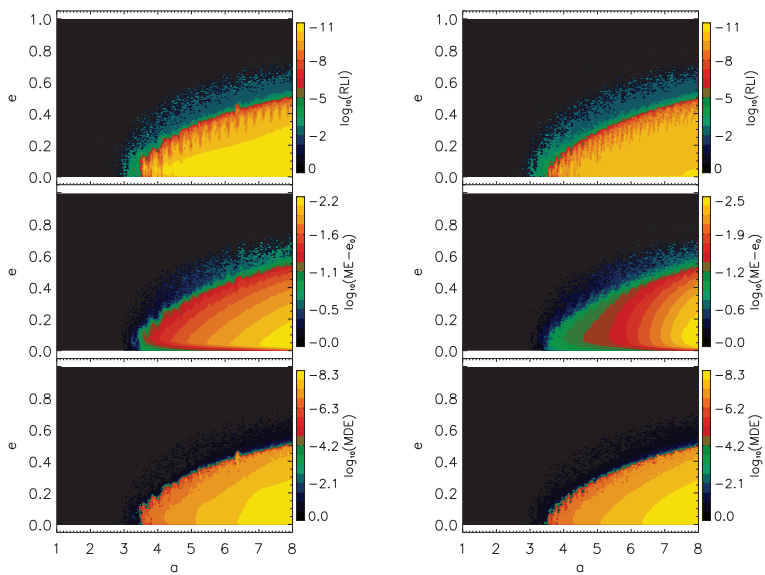
Bár a 2.6, 2.7, 2.8, 2.9, 2.10, 2.11. és 2.12. ábrákon az excentricitást $e = 1$ -ig ábrázoltam, valójában csak 0,85-ig végeztem számításokat. Erre két megfontolás vezetett. Egyfelől, ha túl nagy az excentricitás, a pálya kinyúlik jóval a hatásszférán túlra, ahol a Nap hatása már nem elhanyagolható. Másfelől, a nagy excentricitás kis lépésközt jelent a mozgásegyenletek integrálásakor, ami jelentősen növelte volna a számítási időt. A vizsgálat során alkalmazott feltétel két esetben vezetett a stabil tartomány csökkenéséhez: az 1999 RZ253 esetében ez a csökkenés csak minimális, és csak a stabil tartomány legvégét érinti, míg az 1999 TC36 esetében a levágás hatása már a stabil tartomány harmadára terjed ki az a tengely mentén. A hiányzó tartomány azonban így is csak minimális.

2.4.4. A vizsgált rendszerek paraméter-tere

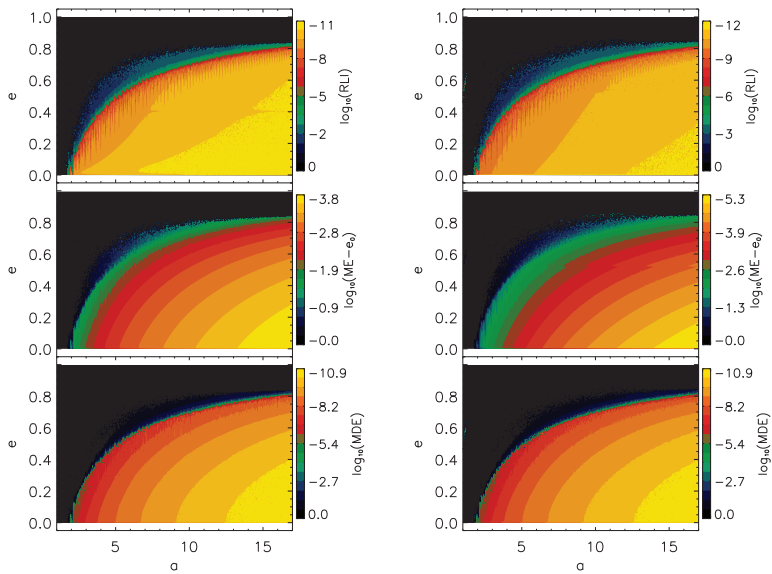
1. 1997 CQ29: A legkisebb tömegű, közepes szeparációjú és excentricitású rendszer, amelynek fázistere kicsi. A stabil tartomány $a = 3,5$ A -tól kezdődik, és $a = 8$ A -nál $e = 0,5$ -ig emelkedik. A rendszer körösödési ideje nagy. Harmadik komponens jelenléte a stabil tartomány kis kiterjedése miatt nem valószínű (2.6. ábra).
2. 1998 SM165: Nagy tömegű, nagy szeparációjú rendszer, melynek excentricitása nem ismert. Fázistere közepesen nagy, a stabil rész $a = 2$ A -tól kezdődik, és $a = 17$ A -nál $e = 0,8$ -ig emelkedik. A körösödési ideje nagy. A stabil tartomány viszonylag nagy mérete miatt harmadik komponens létezése elképzelhető (2.7. ábra).
3. 1998 WW31: Kis tömegű rendszer, nagy szeparációval, és a vizsgált kettős Kuiper-objektumok közül a legnagyobb excentricitással. A kis fázistérben a stabil tartomány $a = 3,8$ A -nál kezdődik, és $a = 6$ A -nál is csak $e = 0,4$ -ig emelkedik. Körösödési ideje nagy. Jelentősen mondható a stabil tartomány méretének az átlagolástól való függése, ami azt jelenti, hogy erős a szögváltozók kezdőértékeitől való függés. Harmadik komponens jelenléte nem tűnik valószínűnek (2.8. ábra).
4. 1999 RZ253: Mint a 2.2. táblázatban látható, az 1999 RZ253 egy viszonylag kis szeparációjú rendszer, közepes excentricitással, és kis tömeggel. Ezen adatok alapján a pálya körösödési skálaidejére $\tau = 2,8 \times 10^9$ év adódik (2.3. táblázat), ami lényegesen kisebb, mint a Naprendszer kora. Ha feltételezzük, hogy az excentricitás

időben exponenciálisan változik (ld. 2.9 egyenlet) τ skálaidővel, azt kapjuk, hogy a kettős pályájának excentricitása 2.2×10^9 évvel ezelőtt $e = 1$ volt. Következésképpen a rendszer az utóbbi kb. 2 milliárd évben állt össze komponenseiből, vagy legfeljebb ennyi ideje erős perturbációnak volt kitéve. A vizsgált a, e síkot szemlélve nagy kiterjedésű stabil tartományt láthatunk, amely $a = 3,5 A$ -tól kezdődik, és a vizsgált tartomány végén ($a = 29 A$) nagy excentricitásokra ($e > 0,85$) is kiterjed, mind a kezdeti középánomáliára, mind a kezdeti pericentrum argumentumára való átlagolás esetén. Az 1999 RZ253 esetében tehát a stabil tartomány nagysága alapján elképzelhető harmadik komponens jelenléte, viszont a feltételezhető viszonylag alacsony életkor csökkenti ennek valószínűségét. Jó próbaköve lehet a kettős Kuiper-objektumok kialakulására vonatkozó elméleteknek, hiszen ha a pálya szűkülését kisebb KBO-kkal való véletlen találkozások okozzák, akkor néha befogással kell végződnie egy-egy ilyen találkozásnak. Míg pl. az 1998 WW31-hez hasonló rendszerben egy ilyen befogott test csak rövid ideig lehet a rendszer része a kis stabil tartomány miatt, az 1999 RZ253 esetén akár végleges befogódás is előfordulhat (2.9. ábra).

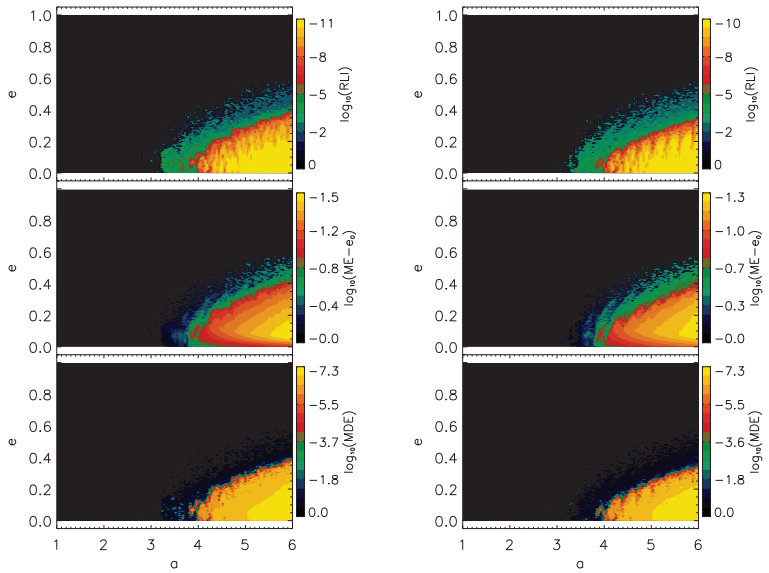
5. 1999 TC36: A legnagyobb tömegű az általunk vizsgált rendszerek között, ismeretlen excentricitással és közepes szeparációval. A fázistere nagy, amelyben a stabil tartomány $a = 3 A$ -nál kezdődik, és $a = 20 A$ -tól a vizsgált tartomány végéig, $a = 28 A$ -ig $e > 0,85$ fölé is kiterjed. Körösödési ideje nagy. Harmadik komponens jelenléte elképzelhető, bár az ismeretlen excentricitás bizonytalanságot jelent (2.10. ábra).
6. 2000 CF105: Közepes tömegű rendszer, ismeretlen excentricitással és nagy szeparációval. A kisméretű fázistérben a stabil tartomány $a = 2,2 A$ -nál kezdődik, és a vizsgált tartomány végén ($a = 7 A$) $e = 0,56$ -ig emelkedik. Körösödési ideje nagy. A vizsgált tartománynak jelentősebb részén erős a szögváltozók kezdeti értékétől való függés. Harmadik komponens jelenléte a kis fázistér miatt nem várható (2.11. ábra).
7. 2001 QT297: Közepes tömegű rendszer, közepes excentricitással. A rendszer szeparációja a vizsgált kettősök között a legnagyobb. A stabil tartomány $a = 3,2 A$ -nál kezdődik, és az erős rezonanciák több, egymással nem, vagy csak alig érintkező tartományra osztják. A vizsgált tartomány határán ($a = 5 A$) $e = 0,35$ -ig tart a stabil régió. Igen erős a szögváltozók kezdeti értékétől való függés. Körösödési ideje nagy. Harmadik komponens jelenléte nem valószínű (2.12. ábra).



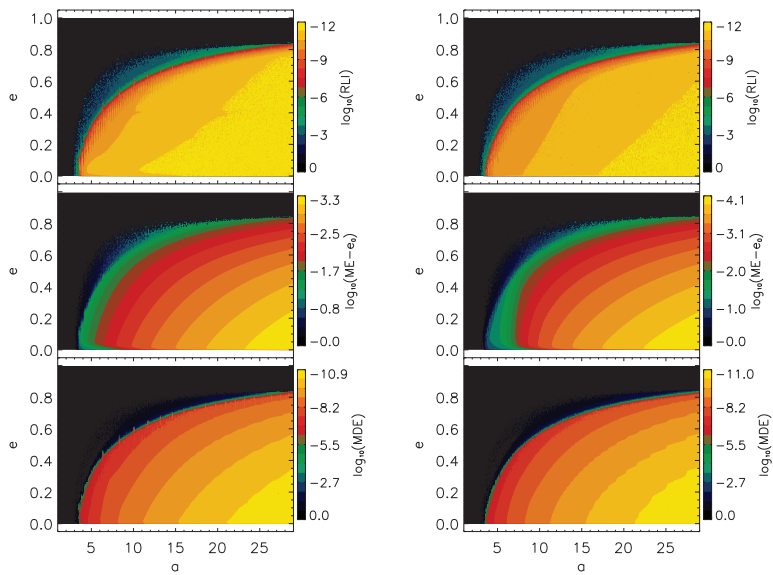
2.6. ábra. 1997 CQ29



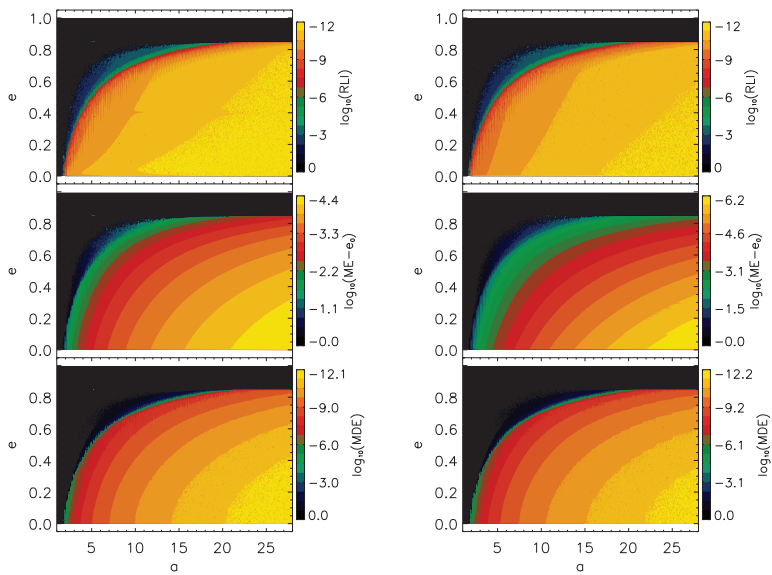
2.7. ábra. 1998 SM165



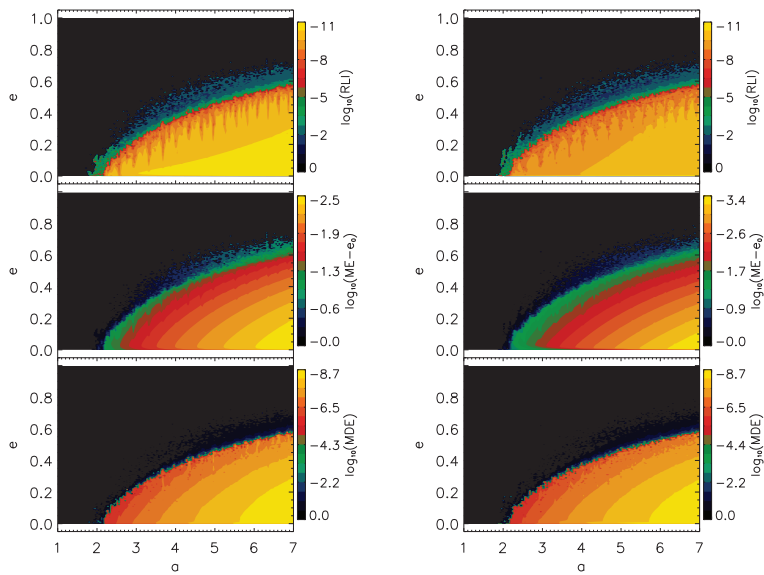
2.8. ábra. 1998 WW31



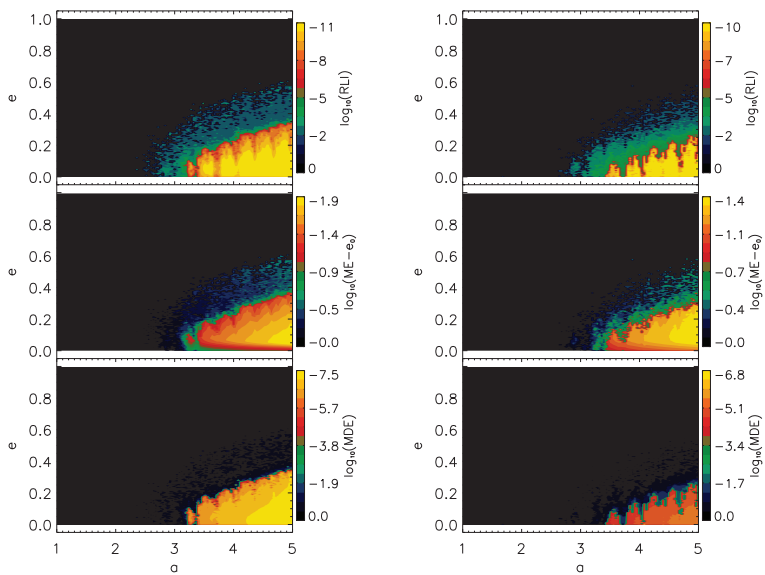
2.9. ábra. 1999 RZ253



2.10. ábra. 1999 TC36



2.11. ábra. 2000 CF105



2.12. ábra. 2001 QT297

2.5. Összefoglalás

A Plútó-Charon rendszer a legközelebbi olyan ismert, viszonylag nagy tömegparaméterű kettős rendszer, amelyben ún. P-típusú pályákon keringő égitesteket találtak. Ez a körülmény különösen fontossá tette a rendszer stabilitásának vizsgálatát, hiszen az igen gyakori előfordulású kettőscsillagok körüli esetleges bolygórendszerek modelljének tekinthető. A vizsgálatok alapján elmondható, hogy a stabil tartomány retrográd irányban ($i > 90^\circ$) nagyobb kiterjedésű, mint a direkt ($i < 90^\circ$) tartományban. Ha növeljük a próbatest pályájának excentricitását, a stabil régió kiterjedése csökken, de a csökkenés nem egyformán érinti a direkt és a retrográd tartományt. Direkt pályák esetén a csökkenés sokkal jelentősebb, mint retrográd esetben. A stabil tartomány belső határának kifelé tolódása egyben felső határt is ad a Nix és a Hydra pályájának jelenlegi, illetve egykori excentricitására, ami 0,17 és 0,31-nek adódott. Megállapítható továbbá, hogy a Charon pályája fél nagytengelyének 2,15-szörösénél kisebb félnagytengelyű pályák instabilak, így ebben a tartományban nem létezhetnek további holdak.

A Nix és a Hydra jelenlegi pályája alapján valószínűtlennek látszik, hogy befogással váltak a Plútó holdjaivá. Ennek két oka van. Egyrészt a retrográd pályára való befogódásnak nagyobb az esélye, hiszen a retrográd tartományban nagyobb a stabil régió kiterjedése. Ennél nyomósabb érv, hogy a befogás során kialakuló elsődleges pálya excentricitása nagy, és csak hosszú – a Naprendszer korával összemérhető – idő alatt csökken nulla közelébe, miközben a jelenlegi helyzetben már ezer periódus nagyságrendű idő (egy-két évtized) alatt kiperturbálódnának, ha az excentricitás 0,17, illetve 0,31 felett lenne.

Míg a Plútó-Charon rendszer kialakulását a Plútónak egy hasonló méretű égitesttel való ütközésére vezetik vissza, addig a kettős Kuiper-objektumok esetén teljesen más keletkezési folyamatokat tartanak elképzelhetőnek. Jelenleg öt elképzelés verseng, amelyek közötti választást segítheti, ha sikerülne egyes rendszerekben harmadik test jelenlétét kimutatni. Az elvégzett vizsgálatok alapján három rendszer esetén lehet nagy kiterjedésű stabil tartományról beszélni. Ezek az 1998 SM165, az 1999 RZ253 és az 1999 TC36. Ezen rendszerekben elképzelhető, hogy egy harmadik test pályája hosszabb ideig stabil legyen (Nagy és mtsai, 2007). Bizonytalanságot jelent, hogy az 1998 SM165 és az 1999 TC36 esetében nem ismert a rendszer excentricitása. A további négy vizsgált rendszer, az 1997 CQ29, az 1998 WW31, a 2000 CF105 és a 2001 QT297 esetén a stabil tartomány kis kiterjedésű, így harmadik test jelenléte csak ideiglenesen lehetséges (Nagy és mtsai, 2007).

Különösen érdekes lehet a keletkezésekre vonatkozó elméletek szempontjából az 1999 RZ253 jelű rendszer. Ebben a rendszerben nagy a holdak számára lehetséges stabil tarto-

mány, így ha a pálya szűkülését a kisebb KBO-kkal való találkozás okozza, akkor időnként befogással is végződhet egy-egy találkozás. Mivel a rendszer kora nem lehet több 2 milliárd évnél, az esetlegesen talált holdak száma és pályája lehetőséget kínálhat a kisebb KBO-k számának, illetve a találkozások gyakoriságának megbecslésére is. Hasonló jellegű következtetések levonására nyílna lehetőség, ha valamelyik kis stabil tartománnyal rendelkező 1997 CQ29, 1998 WW31, 2000 CF105, 2001 QT297 kettősben fedeznének fel egy harmadik komponenst (Nagy és mtsai, 2007).

A Nix és a Hydra létezése, és pályájuk stabilitása jelzi, hogy létezhetnek kettőscsillagok körül P-típusú pályán keringő bolygók. Ezt mégjobban alátámasztaná, ha kettős Kuiper-objektumok körül is sikerülne kimutatni harmadik égitestet. A P-típusú pályákon keringő bolygókból álló bolygórendszer szükségszerűen jobban hasonlít a Naprendszerre, mint az eddig felfedezett exobolygó-rendszerek többsége, mivel a rendszerek belsőbb részein csak kis excentricitású pályák lehetségesek.

3. fejezet

Másodlagos rezonanciák trójai típusú égitestek mozgásában

3.1. Bevezetés

Napjainkban az égi mechanika egyik legérdekesebb kérdése, hogy léteznek-e trójai bolygók. A Naprendszerben ugyan nem találunk olyan bolygókat, amelyek egymás L_4 - L_5 Lagrange-pontjában keringenének, de a bolygók holdjai között több példa is akad. Ezek a példák a Szaturnusz holdrendszerében találhatók. Az elsőként felfedezett úgynevezett Lagrange-hold a Dione L_4 pontjában keringő Helene volt, amelyet hamarosan követett a Telesto és a Calypso felfedezése. Utóbbi két hold a Tethys L_4 , illetve L_5 pontjában kering. Meg kell még említeni az egymáshoz nagyon közeli pályán keringő Janus és Epimetheus holdak esetét is, amelyek a Szaturnusz körüli keringésük közben 4 évenként utóléri egymást, és ekkor pályát cserélnek. Ha ezt a „táncot” az egyik hold felszínéről nézzük, azt látjuk, hogy a másik hold egy lópatkót ír le a keringése során, miközben felváltva kívül, majd belül halad el az L_4 , L_5 és L_3 pontok mellett. Mint ilyen, tekinthető a librációs mozgás egy elfajult esetének is. Az igazi kérdés természetesen az, hogy exobolygó-rendszerekben léteznek-e, illetve létezhetnek-e az L_4 , illetve az L_5 pontok körül librációs pályán mozgó bolygók.

A kérdést többen is vizsgálták az utóbbi években mind elméleti oldalról, modellrendszereket használva, mind konkrét rendszerekre vonatkozóan. Kimutatták például, hogy egy naptömegű csillag Jupiter-tömegű bolygójának L_4 (L_5) pontja körül stabil librációs mozgást végezhet egy Szaturnusz méretű bolygó (Laughlin és Chambers, 2002). Szintén pozitív eredményre jutott modellrendszerek vizsgálatával Nauenberg (2002), aki az általános háromtest-problémában az L_4 és L_5 pontok nem-lineáris stabilitását tanulmányozta

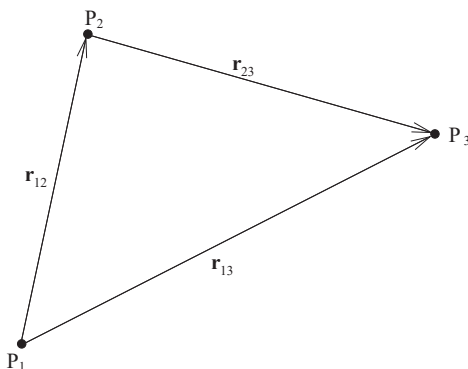
az excentricitás és a tömegparaméter függvényében. Már ismert exobolygó-rendszerekre végzett számításokat például Érdi és Sándor (2005); Dvorak és mtsai (2004); Schwarz és mtsai (2005); Ji és mtsai (2005); Schwarz és mtsai (2007). A konkrét rendszerekre végzett vizsgálatok is azt mutatták, hogy több esetben is elképzelhető trójai bolygók jelenléte.

Egy trójai bolygó kimutatására több módszer is kínálkozik. Felhasználható például a csillag radiális sebesség-görbéje (Laughlin és Chambers, 2002), asztrometriai és tranzit fotometriai mérések. Két csillag, a HD 128311 és a HD 82943 radiális sebesség-görbéjének ismételt elemzése azt mutatta, hogy az eredetileg feltételezett két, egymással 2:1 rezonanciában lévő jupiterszerű óriásbolygó mellett az is kielégítően magyarázza a megfigyeléseket, ha két, egymás Lagrange-pontjai körüli pályáján keringő bolygót tételezünk fel (Gozdziewski és Konacki, 2006). Hasonló magyarázat lehetséges a HD 73526 rendszer esetén is, bár Tinney és mtsai (2006) és Sándor és mtsai. (2007) ezzel ellentétes következtésre jutottak. Míg a radiális sebesség mérése csak Jupiter-típusú bolygók esetében vezet eredményre, addig a radiális sebesség-görbe és a bolygók csillag előtti elhaladásának megfigyelése együttesen alkalmazva lehetőséget kínál Föld-típusú trójai bolygó kimutatására, csupán földfelszíni műszerek használata esetén is (Ford és Gaudi, 2006).

3.2. Az elliptikus korlátozott háromtest-probléma önhasonló megoldásai

A háromtest-probléma vizsgálatának nehézségét az adja, hogy a rendszer nem integrálható. A mozgást leíró egyenletek egyszerűbb alakot öltenek, ha bizonyos korlátozásokat vezetünk be. Ilyen korlátozás lehet például, ha a három égitest egy síkban mozog, az egyiknek elhanyagolhatóan kicsi, nulla a tömege, illetve a két másik, tömeggel is rendelkező test egymás körüli pályájának excentricitását nullának választjuk. Ezt az esetet nevezzük kör korlátozott háromtest-problémának, vagy röviden csak korlátozott háromtest-problémának. Ha kevesebb megszorítást téve a tömeggel rendelkező komponensek pályáját ellipszisnek vesszük, akkor jutunk az elliptikus korlátozott háromtest-problémához. Az egyszerűsítések ellenére a kör és az elliptikus korlátozott háromtest-probléma sem válik integrálhatóvá.

Az általános háromtest-probléma paramétereinek megfelelő megválasztásával olyan konfigurációkhoz jutunk, amelyek időben önhasonló módon változnak. Ez a 3.1. ábra jelöléseivel azt jelenti, hogy



3.1. ábra. Háromtest-probléma vázlata

$$\frac{|\mathbf{r}_{ij}|}{|\mathbf{r}_{ij}|_0} = f(t), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (3.1)$$

ahol a 0 index a $t = 0$ -ban felvett értékre utal, és $f(t)$ csak az idő függvénye. Megmutatható, hogy a háromtest-probléma esetén öt ilyen elrendezés létezik. Ezek előállításához az első két testet tetszőlegesen helyezhetjük el, a harmadikat viszont már csak az öt úgynevezett Lagrange-pont valamelyikébe. A pontok közül három (L_1 , L_2 , L_3) a másik két égitestet összekötő egyenes mentén helyezkedik el. A pontos helyet a testek tömegének aránya határozza meg. Ez a három megoldás mind lineárisan, mind nem-lineárisan instabil. A további két önhasonló megoldáshoz a harmadik testet úgy kell elhelyezni, hogy a másik kettővel egyenlő oldalú háromszöget alkosson. Így kapjuk az L_4 és L_5 pontokat. Ezek a megoldások bizonyos feltételek teljesülése esetén lineárisan stabilak lesznek.

3.2.1. Stabilitás kör korlátozott esetben

Ebben a fejezetben Érdi (1996) gondolatmenetét követjük.

A kör korlátozott eset önhasonló megoldásait meghatározó (3.1) egyenlet $f(t)$ függvénye időtől független lesz, vagyis az égitestek egymástól való távolságai időben állandóak. Az ilyen megoldásokat állandóságuk miatt egyensúlyi megoldásoknak is nevezhetjük. A lineáris stabilitás vizsgálatához vegyünk fel egy forgó tömegközépponti koordináta-rendszert, amelynek a szögsebessége egyenlő a két főkomponens keringésének középmozgásával.

Mivel a két test körpályán mozog, ebben a rendszerben állandók lesznek a koordinátáik. Válasszuk meg az x tengelyt úgy, hogy az y koordinátáik nullák legyenek. Ekkor, ha a pálya fél nagytengelyét választjuk egységnek, az x koordináták

$$x_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}, \quad (3.2)$$

$$x_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} - 1 \quad (3.3)$$

lesznek, ahol m_1 és m_2 a testek tömege. Bevezetve a $\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$ tömegparamétert, a két x koordináta az alábbi egyszerű alakot ölti:

$$x_1 = \mu, \quad (3.4)$$

$$x_2 = \mu - 1 \quad (3.5)$$

A μ tömegparaméter 0 és $1/2$ közötti értékeket vehet fel, mivel az $1/2$ és 1 közti értékek megfeleltethetők a 0 és $1/2$ közöttieknek, csak a testek sorszámozását kell felcserélni.

Ebben a rendszerben a harmadik test mozgását az

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \Omega_x, \quad (3.6)$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = \Omega_y \quad (3.7)$$

egyenletek írják le, ahol Ω_x és Ω_y a forgó koordinátarendszerbeli potenciál x illetve y változó szerinti parciális deriváltjai.

A lineáris stabilitás vizsgálatakor kismértékben kitérítjük az egyensúlyi helyzetből a testet, és arra vagyunk kíváncsiak, hogy mi történik ezután. Mivel csak kis ξ, η kitérést alkalmazunk, az ezekből képzett másodfokú mennyiségeket (ξ^2, η^2 és $\xi\eta$) elhanyagolhatóan kicsinek tekinthetjük. Ennek megfelelően az i -edik Lagrange-pontból kitérített test koordinátái $x = x_i + \xi$ és $y = y_i + \eta$ lesznek, a mozgásegyenletek pedig a

$$\ddot{\xi} - 2\dot{\eta} = \Omega_{xx}^{(i)}(x_i, y_i)\xi + \Omega_{xy}^{(i)}(x_i, y_i)\eta \quad (3.8)$$

$$\ddot{\eta} + 2\dot{\xi} = \Omega_{xy}^{(i)}(x_i, y_i)\xi + \Omega_{yy}^{(i)}(x_i, y_i)\eta \quad (3.9)$$

alakot öltik. Itt felhasználásra került a potenciál első parciális deriváltjainak Taylor-sorfejtése első rendig:

$$\Omega_x^{(i)}(x_i + \xi, y_i + \eta) = \Omega_x^{(i)}(x_i, y_i) + \Omega_{xx}^{(i)}(x_i, y_i)\xi + \Omega_{xy}^{(i)}(x_i, y_i)\eta \quad (3.10)$$

$$\Omega_y^{(i)}(x_i + \xi, y_i + \eta) = \Omega_y^{(i)}(x_i, y_i) + \Omega_{xy}^{(i)}(x_i, y_i)\xi + \Omega_{yy}^{(i)}(x_i, y_i)\eta \quad (3.11)$$

Mivel az $L_i(x_i, y_i)$ pont ebben a koordináta-rendszerben nem mozog, a pontba helyezett test koordinátáinak idő szerinti deriváltjai nullák, akárcsak a potenciál Lagrange-pontbeli első parciális deriváltjai, így ezeket jogosan hagytuk ki az egyenletekből.

Ha a $\xi, \eta, \dot{\xi}, \dot{\eta}$ változókból egy formális \mathbf{X} vektort alkotunk, akkor az egyenletek az alábbi egyszerű alakba írhatók:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}, \quad (3.12)$$

ahol

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \Omega_{xx}^{(i)} & \Omega_{xy}^{(i)} & 0 & 2 \\ \Omega_{xy}^{(i)} & \Omega_{yy}^{(i)} & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

A megoldásokat – amelyeket $\xi = Be^{\lambda t}$ illetve $\eta = Ce^{\lambda t}$ alakban keresünk – ennek a mátrixnak a sajátértékei adják, vagyis az

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0 \quad (3.14)$$

sajátértékegyenletet kell megoldani. Mivel ez az egyenlet negyedfokú, a megoldása négy λ_j kitevőt és B_j, C_j amplitúdót ad eredményül, ahol j a gyökök sorszáma. Meg lehet mutatni, hogy a probléma tulajdonságai miatt a négy λ_j nem független egymástól, kettő-kettő közülük egymás mínusz egyszerese. Hasonló módon, B_j és C_j együtthatók között az alábbi kapcsolat áll fenn:

$$C_j^{(i)} = -B_j^{(i)} \frac{2\lambda_j^{(i)} - \Omega_{xy}^{(i)}}{\left(\lambda_j^{(i)}\right)^2 - \Omega_{yy}^{(i)}} = B_j^{(i)} \frac{\left(\lambda_j^{(i)}\right)^2 - \Omega_{xx}^{(i)}}{2\lambda_j^{(i)} - \Omega_{xy}^{(i)}}. \quad (3.15)$$

A probléma általános megoldása az egyes partikuláris megoldások lineáris kombinációja:

$$\xi = \sum_{j=1}^4 B_j^{(i)} e^{\lambda_j^{(i)} t}, \quad \eta = \sum_{j=1}^4 C_j^{(i)} e^{\lambda_j^{(i)} t} \quad (3.16)$$

A λ kitevőket vizsgálva megállapítható, hogy az L_1, L_2 és L_3 pontok esetén kettő közülük valós lesz, kettő pedig tisztán képzetes. Mivel a két valós közül az egyik pozitív,

ez azt jelenti, hogy az ezen pontokba helyezett test időben exponenciálisan távolodik a kezdőhelyzetétől. Más szóval, ezek a pontok lineárisan instabilak.

Az L_4 és L_5 pontok esetében megmutatható, hogy a λ kitevők az alábbi módon számíthatók ki:

$$(\lambda^2)_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 27\mu(1-\mu)}}{2}. \quad (3.17)$$

A gyökjel alatti kifejezés előjele a μ tömegparaméter értékétől függ. Egy bizonyos $\mu_0 = 0,038520896\dots$ kritikus értéknél a négyzetgyök alatti kifejezés nulla lesz. Ekkor a λ kitevők a következők lesznek:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{-2}}, \quad \lambda_3 = \lambda_4 = -\lambda_1 \quad (3.18)$$

Mivel λ_1 és λ_3 kétszeres gyökök, nem a (3.16) egyenlet adja az általános megoldást, hanem az alábbi alak:

$$\xi = (a_1 + a_2 t) \cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + (a_3 + a_4 t) \sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \quad (3.19)$$

$$\eta = (b_1 + b_2 t) \cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + (b_3 + b_4 t) \sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \quad (3.20)$$

Látható, hogy a szögfüggvények amplitúdójában lesz egy idővel arányos tag is, vagyis ekkor az L_4 (L_5) pontba helyezett test pályája az idővel arányosan tágul. Ez azt jelenti, hogy $\mu = \mu_0$ esetben az L_4 és az L_5 pont instabil.

Ha a μ -t úgy választjuk meg, hogy nagyobb legyen a μ_0 -nál (de legfeljebb $1/2$), akkor a (3.17) egyenlet szerint a λ kitevők valós és imaginárius résszel is rendelkező komplex számok lesznek. Mivel a gyökök közül kettő-kettő egymástól csak előjelében különbözik, biztos, hogy lesz két olyan is, amelyiknek a valós része pozitív. Következésképpen a (3.16) összegben két tag folyamatosan növekvő amplitúdójú mozgást jelez, míg a másik két tag időben csökkenő. Tekintve, hogy az amplitúdó nem lehet nullánál kisebb, összeségében exponenciálisan növekvő lesz mind a két koordináta, azaz ebben az esetben is instabil az L_4 és az L_5 pont.

A harmadik esetben, amikor μ nulla és μ_0 között van, mind a négy λ tisztán képzetes lesz. Ekkor bezetve a $\nu_1 = |\lambda_1|$ és a $\nu_2 = |\lambda_2|$ jelölést, megfelelő átalakításokkal a ξ , η

koordináták a következő alakot öltik:

$$\xi = C_1 \cos(\nu_1 t) + S_1 \sin(\nu_1 t) + C_2 \cos(\nu_2 t) + S_2 \sin(\nu_2 t) \quad (3.21)$$

$$\eta = \bar{C}_1 \cos(\nu_1 t) + \bar{S}_1 \sin(\nu_1 t) + \bar{C}_2 \cos(\nu_2 t) + \bar{S}_2 \sin(\nu_2 t), \quad (3.22)$$

ahol

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \sqrt{\left| \frac{-1 + \sqrt{1 - 27\mu(1 - \mu)}}{2} \right|}, \\ \nu_2 &= \sqrt{\left| \frac{-1 - \sqrt{1 - 27\mu(1 - \mu)}}{2} \right|} \end{aligned} \quad (3.23)$$

valós frekvenciák, C_1, C_2, S_1, S_2 tetszőleges állandók, $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \bar{S}_1, \bar{S}_2$ pedig az előbbi állandóktól, az Ω potenciál L_4 (L_5) pontbeli második deriváltjaitól és a ν_1, ν_2 frekvenciáktól függő együtthatók. Mivel a koordináták változását leíró (3.22) egyenletben a szögfüggvények együtthatói nem függenek az időtől, a mozgás mindvégig korlátos marad, illetve az L_4 vagy L_5 pontba helyezett test ott is marad. Elmondhatjuk tehát, hogy μ_0 -nál kisebb μ esetén az L_4 és az L_5 pont lineáris értelemben stabil.

3.2.2. Stabilitás elliptikus esetben

Ez a fejezet Danby (1964) és Bennett (1965) gondolatmenetén alapul.

Az elliptikus korlátozott háromtest-probléma esetén a (3.1) egyenletben a jobboldal időfüggő lesz. Megmutatható, hogy ilyenkor a megoldások időben periodikusan pulzáló alakzatok lesznek, azonban ez a pulzálás kitranszformálható, ha időben változó távolságegységet használunk. Egy ilyen távolságegységet, illetve viszonyítási rendszert használva az alakzatok megegyeznek a kör korlátozott esettel.

A stabilitás vizsgálata a kör korlátozott esethez hasonló módon történhet. A harmadik test kis kitérésekre vonatkozó linearizált mozgásegyenleteit most is a (3.12) egyenletnek megfelelő alakba írhatjuk. A további megoldást nehezíti, hogy míg a kör korlátozott esetben az \mathbf{A} mátrix elemei időben állandóak, elliptikus esetben időfüggőek lesznek.

Ha a mozgást sorbafejtjük excentricitás szerint első rendig, akkor az $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + e\mathbf{A}_1(t)$ sorban az időfüggés az $\mathbf{A}_1(t)$ mátrixra korlátozódik, az \mathbf{A}_0 pedig megfelel a kör korlátozott esetnek. Mivel a főkomponensek mozgása periodikus, az \mathbf{A}_1 mátrix időfüggése is periodikus lesz, a főkomponensek keringésével egyező periódussal.

Mivel a (3.12) egyenlet \mathbf{A} mátrixa 4×4 elemű, most is négy független $\mathbf{x}_i(t)$ meg-

oldásunk lesz. Rendezzük ezeket a vektorokat egy 4×4 -es $\mathbf{x}(t)$ mátrixba úgy, hogy a mátrix oszlopai legyenek az egyes $\mathbf{x}_i(t)$ vektorok. Egy másik $\mathbf{y}(t)$ megoldás mátrixot úgy kaphatunk meg, hogy az $\mathbf{x}(t)$ -t megszorozzuk egy konstans, nem szinguláris mátrixszal. Például, ha az $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t + P)$, ahol P a főkomponensek periódusa, akkor

$$\mathbf{x}(t + P) = \mathbf{H}\mathbf{x}(t), \quad (3.24)$$

ahol \mathbf{H} egy konstans mátrix.

A \mathbf{H} mátrix pontos meghatározásához tekintsük az $\mathbf{\Omega}(t, t_0)$ mátrixfüggvényt. Legyen ez a függvény olyan, hogy elégítse ki az eredeti differenciálegyenletünket, vagyis

$$\dot{\mathbf{\Omega}} = \mathbf{A}\mathbf{\Omega}, \quad (3.25)$$

és teljesítse az $\mathbf{\Omega}(t_0, t_0) = \mathbf{I}$ feltételt, ahol \mathbf{I} az egységmátrixot jelöli. Megmutatható, hogy ez az $\mathbf{\Omega}(t, t_0)$ mátrix az $\mathbf{x}(t_0)$ mátrixra úgy hat, hogy $\mathbf{x}(t)$ mátrixá alakítja:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Omega}(t, t_0)\mathbf{x}(t_0). \quad (3.26)$$

Innen adódik az $\mathbf{\Omega}$ triviális alakja:

$$\mathbf{\Omega}(t, t_0) = \mathbf{x}(t)\mathbf{x}^{-1}(t_0). \quad (3.27)$$

Az $\mathbf{\Omega}$ mátrix hatását képszerűen tükrözi az elnevezése: időfejlesztő operátor.

A fentiek alapján nyilvánvaló, hogy $\mathbf{H} = \mathbf{\Omega}(t + P, t)^1$; a továbbiakban \mathbf{H} elemeit keressük. Megfelelő transzformációt választva \mathbf{H} mátrix főtengetely-transzformálható. Ekkor az

$$\mathbf{x}^*(t + P) = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_4 \end{pmatrix} \mathbf{x}^*(t) \quad (3.28)$$

egyenlethez jutunk, ahol s_i az i -edik sajátérték. Ennek megfelelően, ha az i -edik oszlopktekt tekintjük, akkor az

$$\mathbf{x}_i^*(t + P) = s_i \mathbf{x}_i^*(t) \quad (3.29)$$

¹ Megmutatható, hogy $\mathbf{\Omega}(t, t_0)$ valójában csak a $t - t_0$ különbségtől függ, így $\mathbf{\Omega}(t + P, t)$ a t -től független, azaz időben állandó.

egyenletet kapjuk.

Stabil mozgás esetén \mathbf{x}_i^* periodikus kell legyen P periódussal. Ez azt jelenti, hogy s_i abszolútértéke egy kell legyen, így az s_i sajátértékek csak komplex egységgyökök lehetnek. Mivel egy Hamilton-rendszert vizsgálunk, tudjuk, hogy ha egy s gyök, akkor s^{-1} is gyök. A négy s_i sajátérték meghatározásához az

$$|\Omega(t + P, t) - s\mathbf{I}| = 0 \quad (3.30)$$

sajátértékegyenletet kell megoldani.

Az s_i sajátértékeket $s_i = \exp(\lambda_i P)$ alakba írva kapjuk a λ_i karakterisztikus kitevőket. Ha az s_i sajátértéket $s_i = b_i \exp(i\theta_i)$ exponenciális alakban írjuk, belátható, hogy a sajátértékek minősége alapján négy eset van (Bennett, 1965):

1. Mind a négy sajátérték b_i abszolútértéke 1, tehát komplex egységgyökök. Ekkor a mozgás periodikus, vagyis stabil. Ha kifejezzük λ_i -t az exponenciális alak együtthatóival, akkor a

$$\lambda_i = \frac{\ln b_i}{P} + i \left(\frac{\theta_i}{P} + n \frac{2\pi}{P} \right) \quad (3.31)$$

összefüggéshez jutunk, ahol n tetszőleges egész szám. Látható, hogy a zárójelben megjelenik a főkomponensek $2\pi/P$ középmozgása, és mellette egy másik θ_i/P frekvencia is. Utóbbi a librációs mozgásra jellemző frekvencia.

2. Mind a négy sajátérték komplex, de kettőnek 1-nél nagyobb az abszolútértéke. Ebben az esetben természetesen a másik kettő abszolútértéke 1-nél kisebb. Vagyis a mozgásnak bár van periodikus összetevője, de az amplitúdója exponenciálisan növekszik, így ez az eset nem stabil.
3. Két sajátérték komplex egységgyök, a két másik pedig valós. Ekkor a valós sajátértékek miatt a mozgás nem lehet stabil, mivel a kettő közül az egyik 1-nél nagyobb kell legyen.
4. Mind a négy sajátérték valós. A mozgás nem stabil, mert a két 1-nél nagyobb sajátérték miatt a kismértékben kitért test exponenciálisan távolodik a kezdőponttól.

A továbbiakban a stabil esetről lesz szó. Ha a kör és az elliptikus korlátozott háromtest-probléma L_4 , L_5 Lagrange-pontjai körüli stabil librációs mozgás frekvenciáit periódusidő szerint rendezzük, akkor használhatjuk az n_s és az n_l jelölést, ahol az s index a rövidebb, míg az l a hosszabb periódusú mozgásra utal. Míg a kör korlátozott esetben n_s és n_l a

μ tömegparaméter ismeretében zárt formulák segítségével kiszámítható (ld. 3.23 egyenletek), addig elliptikus esetben csak a μ tömegparaméter és az e excentricitás szerinti sorfejtéssel adható meg (Rabe, 1970, 1973).

3.3. Az L_4 pont körüli stabil tartomány vizsgálata

Az L_4 és L_5 Lagrange-pontok körüli stabil tartomány kiterjedése az égi mechanika egyik régi problémája, amelynek különböző vonatkozásait számos szerző tanulmányozta. A legtöbb cikk a Jupiter Trójai kisbolygóinak stabilitásával foglalkozik (pl. Levison és msai (1997); Giorgilli és Skokos (1997); Efthymiopoulos és Sándor (2005); Robutel és Gabern (2006)). Mivel a háromtest-problémában az L_4 és az L_5 pontok dinamikai tulajdonságai nem különböznek, a vizsgálatokat elegendő az egyikre elvégezni. Éppen ezért, bár jelen dolgozat elkészítése során a választás az L_4 pontra esett, az eredmények változtatás nélkül alkalmazhatók az L_5 Lagrange-pontra is.

Az elliptikus korlátozott háromtest-probléma modelljében az L_4 pont stabilitása a μ tömegparamétértől és a két főkomponens relatív pályájának excentricitásától függ, amit a továbbiakban e -vel jelölünk. Az L_4 pont körüli stabil tartomány nagysága szintén ezen paraméterek függvénye. Az L_4 körüli pályák nem-lineáris stabilitását vizsgálta Györgyey (1985) a Föld–Hold rendszer tömegparaméterére és néhány excentricitás értékre. Mások az L_4 körüli tartomány stabilitását a stabil pályák számával jellemezték szélesebb μ és e tartományban (Lohinger és Dvorak, 1993). Az L_4 körüli stabil tartomány legrészletesebb felmérését a μ – e síkon Érdi és Sándor (2005) készítette. Jelen értekezés készítése kapcsán újra megvizsgáltuk a problémát a korábbi munkáknál jóval nagyobb felbontást használva mind μ -ben, mind e -ben.

A fejezet további részében használt tömegparaméter jelentése némileg eltér az előző fejezetekben használttól, biztosítandó a szakirodalomban fellelhető korábbi hasonló tárgyú munkákkal való összehasonlíthatóságot. A jelölések keveredését elkerülendő ezt a tömegparamétert a továbbiakban μ_R -rel jelölöm. A továbbiakban a legnagyobb tömegű komponens (a csillag) tömege 1, a kisebbik (az óriásbolygó) tömege pedig μ_R . Így a két test együttes tömege most $1 + \mu_R$, szemben a korábbiakkal, ahol is 1 volt. A próbatest (a trójai bolygó) tömegét elhanyagolhatóan kicsinek, azaz nullának választottuk.

3.3.1. A librációs mozgás rezonanciái

Mint azt a 3.2. fejezetben megmutattam, a kör korlátozott háromtest-problémában az L_4 körüli mozgásoknak két jellemző frekvenciájuk van, $n_s = \nu_2$ és $n_l = \nu_1$, a libráció

rövid és hosszú periódusú komponensének megfelelően. Elliptikus esetben maga az L_4 pont is elliptikus mozgást végez n középmozgással, hasonlóan az elsődleges komponensek elliptikus mozgásához. Ez a frekvencia kombinálódik a rövid és hosszú periódusú librációs frekvenciákkal, és így az L_4 körüli mozgásnak már négy frekvenciája van (és ezek lineáris kombinációi), amelyek $e \rightarrow 0$ esetén tartanak az n_s , $n - n_l$, n_l , és $n - n_s$ határértékekhez. Az n -t választva a frekvencia egységének, a normált n_s és n_l frekvencia az alábbi módon írható fel (Rabe, 1970, 1973):

$$n_s^2 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - 4\kappa}), \quad n_l^2 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 4\kappa}), \quad (3.32)$$

ahol

$$\kappa = \frac{27}{4} \frac{\mu_R}{(1 + \mu_R)^2}, \quad (3.33)$$

és

$$\mu_R = \frac{m_2}{m_1}, \quad m_1 > m_2. \quad (3.34)$$

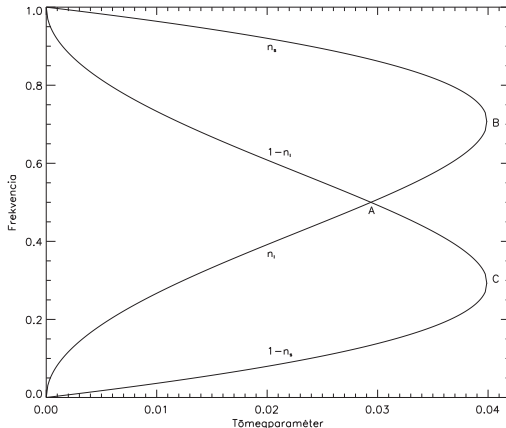
Az n_s és n_l frekvencia a tömegparaméter $\mu_R \leq 0,04006 \dots$ értékeire valós, és amikor a feltételből az egyenlőség teljesül $n_s = n_l = 1/\sqrt{2}$ kétszeres gyök lesz. Ha ezt a kritikus μ_R -t a

$$\mu = \frac{\mu_R}{1 + \mu_R} \quad (3.35)$$

összefüggéssel átszámoljuk az előző fejezetekben használt μ tömegparaméterre, visszakapjuk a 3.2.1. fejezet $\mu_0 = 0,038520896 \dots$ kritikus tömegparaméterét.

A normalizált n_s , $1 - n_l$, n_l és $1 - n_s$ frekvenciákat, mint a μ_R tömegparaméter függvényét mutatja a 3.2. ábra. Az $n_s(\mu)$ és $n_l(\mu)$ görbék a B pontban találkoznak, míg az $1 - n_l$ és az $1 - n_s$ görbék a C pontban. Mindkét metszésponthoz a $\mu_R = 0,04006$ tömegparaméter tartozik, a közös frekvenciák pedig $1/\sqrt{2}$, illetve $1 - 1/\sqrt{2}$. Az $1 - n_l$ és az n_l görbék az A pontban metszik egymást $\mu_R = 0,02944$ -nél, és itt a közös frekvencia $1/2$. Az A, B és C pont az egyes frekvenciák közötti 1:1 rezonanciának felelnek meg.

Az elliptikus korlátozott háromtest-problémában az L_4 pont körüli librációs frekvenciákat egy Rabe (1973) által felírt egyenlet segítségével lehet meghatározni, amely kapcsolatot teremt a z frekvencia, a κ módosított tömegparaméter (3.33 egyenlet) és az e



3.2. ábra. A librációs mozgás határfrekvenciái az elliptikus korlátozott háromtest-problémában $e \rightarrow 0$ esetén.

excentricitás között:

$$D(z, \kappa, e) = A(z, \kappa) + e^2 B(z, \kappa) + e^4 C(z, \kappa) = 0. \quad (3.36)$$

Az $A(z, \kappa)$, $B(z, \kappa)$ és $C(z, \kappa)$ függvények sorfejtése a függelékben található. A 3.36 egyenlet z -ben huszadrendű, κ -ban ötödrendű e -ben pedig negyedrendű. Mindazonáltal ez egy közelítő formula, amit az L_4 körüli oszcilláló megoldások együtt hatóira felírt végtelen sok homogén lineáris egyenlet végtelen determinánsából lehet levezetni. Ennek ellenére a (3.36) egyenlet felhasználható a frekvenciák meghatározására tetszőleges ($0 < \mu_R \leq 0,05$ feltételnek megfelelő) κ , valamint kis és közepes e excentricitások esetén. Rabe (1973) a (3.36) egyenletet az L_4 negyedrendű stabilitásvizsgálatára használta az elliptikus korlátozott háromtest-problémában, valamint a stabil és instabil tartományt elválasztó görbe meghatározására a κ - e síkon.

A (3.36) egyenletnek általában négy különböző megoldása van 0 és 1 közötti z -kre (a $z = 1$ megfelel az elsődleges komponensek egymás körüli keringe középmozgásának, vagyis a választott frekvencia egységnek). Rabe (1973) két megoldást határozott meg a (3.36) egyenletre:

1. $e = 0, \kappa = 3/16$ ($\mu = 0.02944$), $z = 1/2$;
2. $e = 0, \kappa = 1/4$ ($\mu = 0.04006$), $z = 1/\sqrt{2}$.

Az első megoldás a 3.2. ábra A pontjának felel meg, míg a második megoldás a B pontnak. Ezek a megoldások kritikus pontok, ahol két-két frekvencia megegyezik. A κ - e síkon a stabilitás–instabilitás határvonalát ez a két rögzített frekvencia határozza meg. Rabe ezekből a megoldásokból kiindulva adott közelítő analitikus megoldást a határvonalakra sorfejtések alakjában a (3.36) egyenlet alapján, amely közepes e értékekig használható (Rabe, 1973).

A Rabe-féle közelítő megoldás $z = 1/2$ -re harmadrendű:

$$\kappa = \frac{3}{16} \pm \frac{\sqrt{33}}{16}e + 0,04165e^2 \mp 0,14926e^3. \quad (3.37)$$

Ez a megoldás adja az L_4 stabil és instabil tartományait elválasztó határ jobb oldalát a κ - e síkon.

A $z = 1/\sqrt{2}$ -re Rabe (1973) negyedrendű megoldást adott, azonban ennek a megoldásnak a negyedrendű tagját hibásnak találtuk (ld. a 3.3.2. fejezetben). A határnak erre a szakaszára Tschauner (1971) ad egzakt analitikus megoldást. Tschauner eredményének felhasználásával Rabe megoldása korrigálható:

$$\kappa = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}e^2 + \frac{9}{32}e^4. \quad (3.38)$$

A (3.36) egyenlet két fentebbi megoldásán kívül eddig nem voltak ismeretesek további megoldások. Ez alighanem a megoldás algebrai nehézségeire vezethető vissza, amit maga Rabe is jelzett az egyenletek egy korábbi, egyszerűbb alakjával kapcsolatban (Rabe, 1970). A (3.36) egyenlet viszont lehetőséget kínál a frekvenciák meghatározására tetszőleges tömegparaméterre és excentricitásra. S stabilitás–instabilitás határvonalai a κ - e síkon 1:1 arányú rezonanciáknak felelnek meg. A 3.2. ábrán látható frekvencia-görbék alapján néhány további rezonancia típus is lehetséges, amelyeket a 3.1. táblázatban tüntettünk fel.

A (3.37) egy közelítő megoldás az A 1:1 rezonanciára, míg a (3.38) a B 1:1 rezonanciára. A 3.2 ábrát szemlélve látható, hogy létezik egy C 1:1 rezonancia is, $1 - \sqrt{2}$ frekvenciával. Rabe (1970) megmutatta, hogy a (3.36) egyenletnek olyan a szerkezete, hogy ha z egy megoldás, akkor $1 - z$ is az. Mivel a (3.38) egyenlet egy megoldás $z = 1/\sqrt{2}$ -re, ezért $z = 1 - \sqrt{2}$ -re is megoldás. Ez azt jelenti, hogy a (3.38) egyenlet a C 1:1 rezonanciának is egy közelítő megoldása.

3.1. táblázat. A rezonanciák lehetséges típusai

típus	rezonancia
A	$(1 - n_l):n_l$
B	$n_s:n_l$
C	$(1 - n_l):(1 - n_s)$
D	$n_s:(1 - n_l)$
E	$n_s:(1 - n_s)$
F	$n_l:(1 - n_s)$

Az 1:1 rezonanciára egy megoldás a (3.36) egyenletből numerikusan úgy határozható meg, hogy rögzítjük a frekvenciát egy rezonáns értéken ($1/2$ vagy $1/\sqrt{2}$), megoldjuk az egyenletet e -re egy rögzített κ érték mellett, majd megismételjük az eljárást a κ valamely más értékére. Az eljárást κ tetszőlegesen sok értékére elvégezve egy $e(\kappa)$ görbét kapunk az 1:1 rezonanciára. Mivel (3.36) e -ben negyedrendű, de másodrendűre redukálható, a megoldása viszonylag egyszerű.

Amennyiben a rezonancia aránya r , szintén előállítható a megoldás a (3.36) egyenlet segítségével. Most a két frekvencia z , illetve rz lesz, és mind a kettő kielégíti a (3.36) egyenletet, így két egyenlethez jutunk:

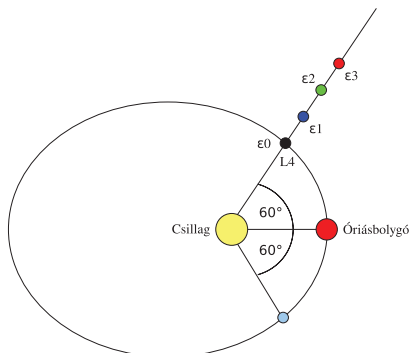
$$D(z, \kappa, e) = 0, \quad D(rz, \kappa, e) = 0. \quad (3.39)$$

Mindkét egyenletből kifejezzük e -t κ egy adott értéke mellett és z -vel mint paraméterrel, majd megkeressük z azon értékét, amelyre az e -re kapott két kifejezés egyenlő. (Az e -t szolgáltató másodfokú egyenlet megoldóképletében a négyzetgyököket negatív előjellel kell figyelembe venni a jó megoldáshoz.) Az eljárást több κ értékre megismételve kapjuk az r rezonancia $e(\kappa)$ görbéjét. Megjegyzendő, hogy a frekvenciák a görbe mentén váltóznak, ellentétben az 1:1 rezonancia esetével.

A fenti eljárás segítségével sikerült meghatározni több rezonáns megoldást. A 3.2 táblázatban ezeknek a görbéknek az $e = 0$ kezdőpontjaihoz tartozó μ_R tömegparaméterei láthatók a hozzájuk tartozó nagyobbik kezdeti frekvenciával. A kisebbik frekvenciát a rezonancia arányával való osztással kaphatjuk meg. A 3.2 táblázatban szintén feltüntettem az A11 és B11 rezonanciák kezdőpontjait, melyeket a (3.37) illetve a (3.38) egyenletekből határoztunk meg.

3.2. táblázat. A rezonáns göbök kezdőpontjai ($e = 0$)

típus	rezonancia	frekvencia	μ_R
A	5:1	0,83333333	0,00403325
A	4:1	0,80000000	0,00575455
A	3:1	0,75000000	0,00883461
B	3:1	0,94868330	0,01370120
A	2:1	0,66666667	0,01507644
D	3:2	0,92307692	0,01940524
B	11:5	0,91036648	0,02195743
B	2:1	0,89442719	0,02489879
A	6:5	0,54545455	0,02554130
A	1:1	0,50000000	0,02943725
B	4:3	0,80000000	0,03668353
B	1:1	0,70710678	0,04006421



3.3. ábra. Az L_4 körüli stabil tartomány mértének meghatározása. A próbatetet először az L_4 pontba helyeztem ($\epsilon_0 = 0$), majd ha az így kialakuló pálya stabilnak bizonyult 5×10^4 periódusra integrálva a rendszert, $\epsilon_1 > 0$ távolságra helyeztem az integrálás kezdetén. Ezt az eljárást addig folytattam, amíg instabilnak nem találtam az új pályát. A kezdeti sebesség minden kezdőpontban nulla volt a két főkomponenshez viszonyítva.

3.3.2. Az L_4 körüli stabil tartomány méreteloszlása

A librációs mozgás frekvenciái között létrejövő rezonanciáknak hatása lehet a mozgás stabilitására. Ebben a fejezetben ennek a hatásnak igyekszünk nyomára bukkanni.

A 3.4 ábra az L_4 körüli stabil tartomány méreteloszlását mutatja az elliptikus korlátozott háromtest-problémában, a μ_R tömegparaméter és az e excentricitás függvényeként, amelyet a következőképpen kaptam. A vizsgált sík minden egyes μ_R , e számpárral jel-

lemzett pontjának megfelelő rendszer esetén először az L_4 pontba tettük a próbatestet, a két elsődleges komponenshez képest nulla kezdősebességgel. Amennyiben a próbatest pályája a numerikus integrálás során a két elsődleges komponens 5×10^4 periódusának megfelelő időtartamra stabilnak mutatkozott, a próbatest kezdeti helyzetét a nagyobb tömegű főkomponensből az L_4 -hez húzott egyenes mentén kissé távolabb helyeztük, miközben kezdeti sebességét a két elsődleges testhez képest továbbra is nullának vettük (3.3. ábra). A mozgást stabilnak tekintettük, ha a próbatest pályája nem metszte a két elsődleges komponens összekötő egyenest, illetve nem lépett be a kisebb főkomponens (óriásbolygó) Hill-szférájába. Azért döntöttünk a stabilitásnak ezen definíciója mellett, mert metszéskor a próbatest pályája elveszíti az L_4 pont körüli librációs jellegét, és az L_5 -öt is körbejáró lópatkó típusúvá válik, mi pedig a librációs pályákra voltunk kíváncsiak, mint a feltételezett trójai bolygók lehetséges pályáira.

A μ_R , e párok által meghatározott rendszerek L_4 körüli stabil tartományának méretét az L_4 -től mért legnagyobb még stabil kitérés nagyságával jellemeztük, amelyet a továbbiakban ϵ jelöl. Természetesen az ilyen jellegű vizsgálatoknál kritikus, hogy az integrálás mennyi időre történik. Tudjuk, hogy az L_4 körüli stabil tartomány kiterjedése az időtartam növelésével csökken (Levison és mtsai, 1997). A stabilitás-vizsgálathoz általunk választott 5×10^4 periódus egy ésszerű kompromisszumnak bizonyult. Ennyi idő alatt már jól láthatóan előtűnnek az L_4 körüli stabil tartomány méreteloszlásának általános jellemzői, mint μ_R és e függvényei, másfelől a nagyfelbontású számítások is még elfogadható idő alatt kivitelezhetők voltak a rendelkezésünkre álló számítógépes háttérrel.²

A főkomponensek kezdőhelyzetének hatását a stabilitásra két kezdőhelyzetből indított integrálás eredményének összehasonlításával vizsgáltam. Az egyik kezdőhelyzetben a főkomponensek a relatív pálya pericentrumában voltak, a másik esetben pedig az apocentrumában. A két eset között csak minimális különbséget találtam.

A μ_R -t és az e -t egy nagyfelbontású rácson változtattam ($0,0001 < \mu_R < 0,05$; $\Delta\mu_R = 0,0001$; $0 < e < 0,6$; $\Delta e = 0,001$) meghatároztuk minden egyes μ_R , e párra a legnagyobb stabil librációs pályához tartozó ϵ határt az elsődleges komponensek közti kezdeti távolsággal, mint egységgel kifejezve. Ezt az ϵ -t fel lehet fogni, mint a legnagyobb stabil librációs pályából származtatott stabilitási tartomány közelítő felszélességét. A jobb összehasonlíthatóság kedvéért ábrázolás előtt úgy normáltuk át az ϵ -t, hogy a két tömeggel rendelkező komponens pályájának fél nagytengelye legyen az egység.

A 3.4 ábra az ϵ eloszlását mutatja a μ_R és az e függvényében, ami megfelel az L_4 körüli

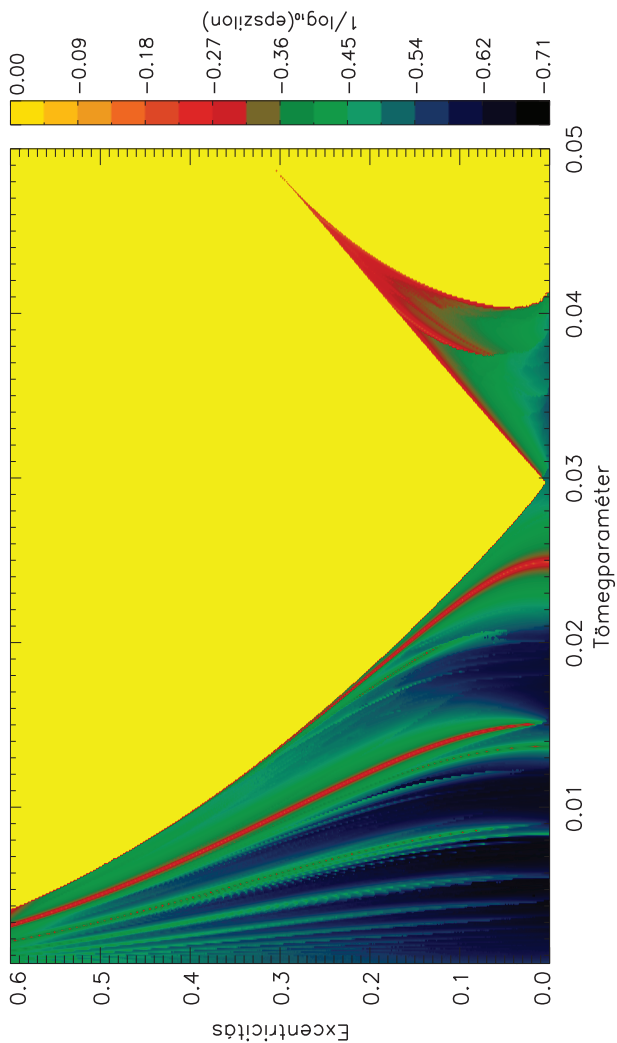
²A számítások elvégzésére az ELTE Szélgép nevű 48 processzoros számítógépét használtam, amely 2008 nyarán egy áramszünet során végleg tönkrement. Ez megnehezíti a további munkát, mivel ezzel a nagyteljesítményű számítógéppel is másfél-két hónapot vett igénybe a 3.4 ábra elkészítése.

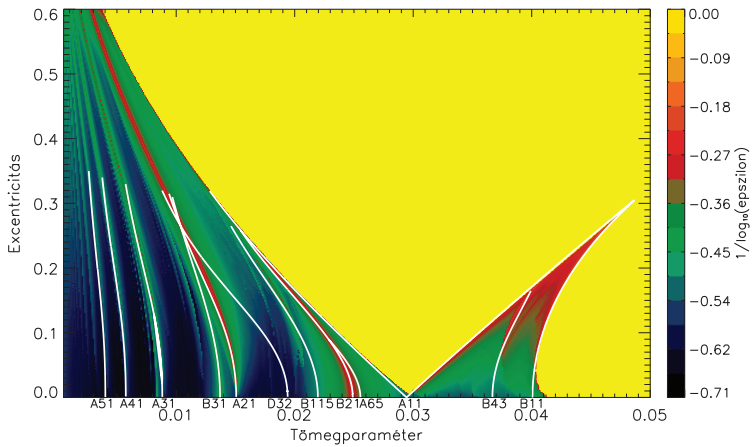
stabil tartomány említett paraméterek függvényében vett méreteloszlásának. Az eloszlás finomszerkezetének láthatóvá tétele kedvéért nem az ϵ -t ábrázoltuk, hanem helyette az $1/\log(\epsilon)$ mennyiséget, amennyiben ϵ nullától különböző volt. A V alakú határvonal felett és az ábra jobb oldalán látható világos (sárga) tartomány teljes instabilitást jelöl ($\epsilon = 0$), azaz még az L_4 pontba helyezett nulla relatív kezdősebességű próbatest pályája is instabil ezen μ_R és e értékek esetén. A V alakú határvonal jól ismert az elliptikus korlátozott háromtest-probléma L_4 pontjának stabilitásvizsgálatából (Danby, 1964; Meire, 1981). Az L_4 pont csak ezen görbe alatt stabil, illetve lehetséges az L_4 körül stabil librációs mozgás. Bár a 3.4 ábra alapvetően az L_4 körüli stabil librációs tartomány méretének eloszlását mutatja, jelzi az L_4 pont stabilitását is. Ez érthető, hiszen amikor a stabil librációs tartomány mérete nullára csökken, akkor maga az L_4 pont is instabillá válik. A színskálán az egyre sötétebb árnyalatok az egyre nagyobb, egyre kiterjedtebb stabil régióknak felelnek meg.

Amint az a 3.4 ábrán látszik, a stabil tartomány méreteloszlásának nagyon összetett a szerkezete. Az ábra finomszerkezete alátámasztja a korábbi megfigyeléseket, miszerint a stabil tartomány mérete nem egyenletesen változik akár az e -t rögzítjük és a μ -t változtatjuk, akár fordítva (Érdi és mtsai, 2007). Látható, hogy több kiterjedt stabil tartomány is van, például kis excentricitásokra ($e < 0,1$) a μ_R 0,014 és 0,02 közötti értékeire.

A 3.4 ábra legszembevetőbb vonása a sötét és világos sávok váltakozása. Adódik a gondolat, hogy a kevésbé kiterjedt stabil tartományt jelző világos sávok a librációs mozgás frekvenciái közötti rezonanciákkal (3.3.1. fejezet) állnak kapcsolatban. A kérdést eldöntendő felrajzoltuk a 3.3.1. fejezetben kiszámított rezonancia-görbékét is a stabil tartomány méreteloszlását mutató ábrára (3.5 ábra).

Először tekintsük az A 1:1 rezonancia görbét, amelyet a (3.37) egyenlet ír le. A nevezett egyenletet felrajzolva a stabilitás eloszlását mutató ábrára azt találtuk, hogy már nem túl nagy, $e \geq 0,2$ excentricitás értéknél elhajlik a stabil tartomány határáról. Mivel ez a megoldás a többivel ellentétben csak harmadrendű, hozzáadtunk egy numerikusan meghatározott negyedrendű tagot, $0,007e^4$ -t. Az így kiegészített megoldás eredményezi a 3.5 ábrán látható A11 jelű görbét. A (3.37) egyenletben az előjelek közül a felsőket választva kapjuk a közel V alakú görbe bal oldali részét, az alsókat választva pedig a jobb oldalt. Amint az látható, a görbe jól egyezik az L_4 stabil és instabil tartományait elválasztó határvonallal közepes excentricitásokig bezáróan ($e < 0,3$). Ezen görbe mentén $1 - n_l = n_l = 1/2$, azaz a határvonal mentén 1:1 rezonanciában áll egymással az $1 - n_l$ és az n_l frekvencia, továbbá n_l 2:1 rezonanciában áll az elsődleges komponensek $n = 1$ frekvenciájával.

3.4. ábra. Az L_4 körüli stabil tartomány méreteloszlása.



3.5. ábra. A librációs mozgás másodlagos rezonanciái és az L_4 körüli stabil tartomány méreteloszlása.

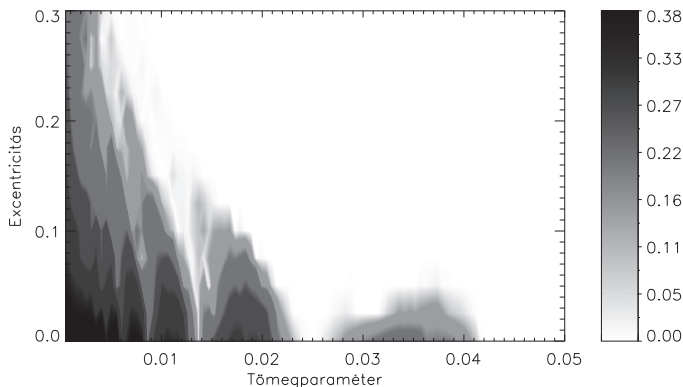
A Rabe (1973) által a B 1:1 rezonanciára adott negyedrendű megoldást hibásnak találtuk, ezért Tschauer (1971) megoldását ábráztuk (3.38 egyenlet). Ezt a megoldást B11 felirat jelzi a 3.5 ábrán. A görbe mentén $n_s = n_l = 1/\sqrt{2}$, így a határvonal mentén az n_s és n_l frekvenciák között 1:1 rezonancia áll fenn. Látható, hogy az elméleti B11 görbe nagyon jól illeszti a numerikusan kapott határt, eltekintve a nagyon kis ($e < 0,05$) excentricitásoktól. A tapasztalt eltérés magyarázatához további vizsgálatok szükségesek.

Azt már láttuk, hogy az L_4 stabil és instabil tartományait határoló görbék az 1:1 rezonanciák helyei. Kérdés, hogy megjelennek-e további rezonancia-görbékkel egybeeső alakzatok is. Azt találtuk, hogy a 3.5 ábrán két jelentős minimum zóna kapcsolódik 2:1 rezonanciához, ezek az A 2:1 és a B 2:1 rezonanciák. A B21 görbe egy minimum zóna közepén halad, amelyet az A 6:5 rezonancia görbéje (A65) határol. Az ábra bal oldalán található minimumok főként magasabb rendű A típusú rezonanciákhoz kapcsolódnak.

Az A21 rezonáns görbéhez közel halad a B31 görbe, sőt találkoznak is a $\mu_R = 0,0103576$, $e = 0,265615$ pontban. Egy harmadik rezonáns görbe, a D32 egzaktul ugyanezen a ponton halad át, ami többszörös rezonanciát jelez. Figyelembe véve, hogy a rezonáns görbék mentén változnak a frekvenciák, jelölje z_s azt a frekvenciát, amely határértékben $1 - n_l$. Ekkor a három rezonáns görbe metszéspontjánál a frekvenciák rendre $n_s = 0,9629994$, $n_l = 0,3209998$ és $z_s = 0,6419995$. Ez azt jelenti, hogy $n_s/n_l = 3/1$, $z_s/n_l = 2/1$ és $n_s/z_s = 3/2$, vagyis tényleg fennáll a háromszoros rezonancia. A három frekvencia között egy Laplace-típusú összefüggés is fennáll: $z_s + n_l - n_s = 0$. A számítások azt mutatják, hogy a metszéspontban az L_4 körüli stabil tartomány mérete nagyon lecsökken, kevesebb mint 2° szinódikus hosszúságú.

A B31 és B21 rezonáns görbék kezdőpontja $\mu_R = 0,01370120$ és $\mu_R = 0,02489879$, ami a szokásos értelemben vett tömegparaméter esetén $\mu = 0,01351602$ illetve $\mu = 0,24293897$. Ezek azok az értékek, amelyeknél korábban az L_4 -et nem-lineárisan instablnak találták a kör korlátozott háromtest-problémában (Deprit és Deprit-Bartholome, 1967). Érdekes, hogy mint az a 3.4 és 3.5 ábrán látszik, az A21 rezonáns görbe mentén az L_4 körüli stabil tartomány kisebb kiterjedésű, mint a B 3:1 rezonancia mentén, jóllehet az A21 görbe $e = 0$ kezdőpontjában az L_4 nem-lineárisan stabil. Az ábrát szemlélve felmerül a gyanu, hogy a közeli B 3:1 rezonancia hatása stabilizálja az A 2:1 rezonanciát. Erre az utal, hogy a B31 görbe kis excentricitásoknál kiszélesedik, és ez a kiszélesedő udvarszerű rész szabályosan elmettszi az A21 görbét. A kérdés tisztázása további mélyreható vizsgálatot igényel.

A 3.4 ábra jobb oldalán található legjelentősebb minimum zóna a B 4:3 rezonanciával áll kapcsolatban (vö. 3.5 ábrával). Érdekes, hogy ez a zóna nem $e = 0$ -nál kezdődik,



3.6. ábra. A stabil tartomány méretének függése a tömegparamétertől és az excentricitástól a stabil és instabil pályák számának aránya alapján.

hanem $e \approx 0,1$ -nél.

Érdemes összevetni a 3.4 ábrát másfajta dinamikai stabilitási vizsgálatok eredményeivel (Érdi és mtsai, 2007). A 3.6 ábra minden tömegparaméter és óriásbolygó-pálya excentricitás pár által meghatározott rendszerben $1,5 \times 10^4$ L_4 -hez közeli pálya stabilitásvizsgálatának eredményeit mutatja. A vizsgálat során a trójai bolygó pályájának fél nagytengelye (a) és a pályamenti hosszúsága (λ) változott ($0,9 \leq a \leq 1,1$; $\Delta a = 0,0025$; $0^\circ \leq \lambda \leq 180^\circ$; $\Delta \lambda = 1^\circ$), és a stabilitást a karakterisztikus Ljapunov-indikátor (LCI) jellemezte. Az ábra egy μ_R , e pontjához rendelt szín azt mutatja, hogy a megvizsgált $1,5 \times 10^4$ pálya között mekkora volt a stabil pályák aránya. Habár ennek az ábrának a felbontása lényegesen elmarad a 3.4 ábráétól ($\Delta \mu_R = 0,0005$; $\Delta e = 0,025$), az alapvető szerkezet mégis erősen emlékeztet az eddig látottakra. A 3.5 ábrán azonosított A 2:1, A 3:1 és A 4:1 rezonanciákhoz tartozó minimum zónák a 3.6 ábrán is megjelennek. Az A 2:1 rezonanciához tartozó zóna különösen erős minimumot mutat $\mu \approx 0,015$ körül. A 3.6 ábra szintén megerősíti, hogy nagyobb valószínűséggel fordulnak elő stabil L_4 körüli pályák a tömegparaméter és az excentricitás kisebb értékeire. A 3.6 ábra jó egyezést mutat Érdi és Sándor (2005) munkájával.

Vizsgáltuk az L_4 körüli stabilitási tartomány méreteloszlását olyan esetekben is, amikor a próbatestnek is adtunk tömeget. Az eredményül kapott ábrák szerkezete egyezett a 3.4 ábrán láthatóval még akkor is, ha a trójai bolygó tömege elérte az egy Jupiter-tömeget.

Az egyetlen eltérést az jelentette, hogy a próbatest tömegének növelésével a sávok némileg eltolódtak a kisebb tömegparaméterek irányába. Ez azonban lényegében megszűnt, ha az óriásbolygó és a próbatest tömegének összegét tekintettük tömegparaméternek. Szintén csak minimális eltérést találtunk a stabil tartomány méreteloszlásában, ha a főkomponensek kezdőhelyzetét a relatív pálya pericentruma helyett az apocentrumába helyeztük át. Ezek tükrében a 3.4 ábra meglehetősen általános érvényűnek látszik.

3.4. Következtetések

A trójai bolygók létezése szempontjából az L_4 és L_5 pontok körüli stabil tartomány mérete kritikus jelentőséggel bír. Munkánk során meghatároztuk az L_4 körüli stabil tartomány méreteloszlását az elliptikus korlátozott háromtest-probléma esetében a tömegparaméter és az excentricitás függvényeként. A méreteloszlás finom szerkezettel rendelkezik, maximumok és minimumok váltogatják egymást (Érdi és mtsai, 2007). Megmutattuk, hogy a minimum-zónák az L_4 körüli librációs mozgás frekvenciái közötti rezonanciákkal állnak kapcsolatban (Érdi és mtsai, 2007). A helyzet analóg a Naprendszer fő kisbolygó övében, a kisbolygók eloszlásában a középmozgás-rezonanciáknál jelentkező Kirkwood-zónákkal.

Egy nagy minimum-zóna, az A 2:1 rezonancia ($\mu = 0,015$) körül helyezkedik el, ami egy naptömegű csillagot feltételezve hozzávetőlegesen 15 Jupiter-tömegű kísérőt jelent. Ezt nevezhetnénk akár barna törpe határnak is, hiszen nem valószínű, hogy egy ekkora tömegű barna törpének trójai társa legyen az igen kisméretű stabil tartomány miatt (Érdi és mtsai, 2007). A 3.4 ábra azonban felveti annak lehetőségét, hogy a barna törpe határ feletti égitesteknek is lehet trójai társa (Érdi és mtsai, 2007). Ebben az esetben kérdés, hogy létezik-e olyan fizikai folyamat, amely lehetővé teszi egy bolygó L_4 körüli librációs pályára való befogódását, vagy a helyben történő kialakulását. A magasabb rendű A 5:1, A 4:1 és A 3:1 rezonanciák szintén olyan tömegparaméter értékeket (0,004, 0,006, 0,009) és kapcsolódó excentricitásokat jeleznek, amelyek mellett egy egybolygós exobolygó-rendszerben aligha található trójai bolygó (Érdi és mtsai, 2007). A trójai bolygók létezése szempontjából a legkedvezőbb körülményeket a kis tömegparaméterű és kis pálya-excentricitású óriásbolygók jelentik, bár ezt a tartományt is érinthetik a magasabb rendű rezonanciák hatásai (Érdi és mtsai, 2007).

Az L_4 Lagrange-pont körüli tartomány stabilitásának a tömegparamétertől való függése bizonyos esetekben kihathat az égitestek keletkezési folyamataira is. Amennyiben például a Charon keletkezését valóban a Plútónak és egy nagyobb égitestnek az ütközése

előzte meg, akkor a kidobott törmelékből összeálló Charon tömegének növekedése közben a Plútó–„ős-Charon” rendszert jellemző tömegparaméter–excentricitás pár a μ - e síknak hol a stabil, hol az instabil tartományába esett. A stabil–instabil átmenet során az L_4 , L_5 pontokban esetlegesen felhalmozódott anyagnak viszonylag rövid idő alatt kellett kilöködnie a Lagrange-pontok környezetéből, ami a Plútó és a Charon felszínén a becsapódások gyakoriságának jelentős emelkedését válthatta ki ideiglenesen. A kérdés tisztázása további vizsgálatokat igényel.

4. fejezet

Zárszó

Az égboltot szemlélve megállapíthatjuk, hogy a kettős rendszerek meglehetősen gyakoriak. A Naprendszerben a kisebb és a nagyobb égitestek között is találunk kettősöket, akár csak a csillagok közt. Az ilyen rendszerek vizsgálatának időszerűségét az exobolygók keresésére irányuló kutatásokban tapasztalható fellendülés adja, hiszen felmerül a kérdés, hogy érdemes-e a kettőscsillagok körül keringő bolygókat keresni, és ha igen, hol?

Ha már sikerült egy csillag körül kimutatni egy exobolygót, akkor adódhat egy újabb probléma. Az eddig felfedezett exobolygó-rendszerekben ugyanis sokszor óriásbolygó kering a lakható zónában, így ott az olyannyira keresett földtípusú égitestek vagy csak a bolygó holdjaként, vagy az L_4 (L_5) pont körül librációs mozgást végző trója bolygóként létezhetnek. Míg egy exobolygó holdjának kimutatása a jelenlegi technikával a lehetetlen határát súrolja, egy trójai bolygó kimutatása már ma sem reménytelen feladat. Így időszerű feltenni a kérdést, hogy milyen körülmények között lehet egy ilyen típusú pálya stabil.

A napjainkig a fősorozati kettőscsillagok körül felfedezett bolygók S-típusú pályákon keringenek, elméletileg azonban léteznek P-típusú pályák is, amelyeken a bolygók egyszerre kerülik meg mind a két csillagot. A PSR B1620-26 pulzár és egy fehér törpe által alkotott kettős bolygója, illetve a Plútó–Charon rendszer két kis holdja, a Nix és a Hydra azt mutatja, hogy a természetben is megvalósulnak ilyen pályák. Dolgozatom első felében a P-típusú pályák, köztük a Nix és a Hydra pályáinak stabilitását vizsgáltam a kettőscsillagok modelljének tekinthető Plútó–Charon rendszer, az 1997 CQ29, 1998 SM165, 1998 WW31, 1999 RZ253, 1999 TC36, 2000 CF105 és a 2001 QT297 kettős Kuiper-objektumok esetében.

Dolgozatom második felét a trójai típusú mozgásokban bizonyos feltételek mellett létrejövő rezonanciák kimutatásának szenteltem.

A doktori értekezés elkészítése során a problémákat leíró differenciálegyenlet-rendszerek megoldására numerikus módszereket használtam. A Plútó–Charon rendszer és a kettős Kuiper-objektumok P-típusú pályái esetén a stabilitást három mennyiség segítségével határoztam meg. Ezek a mennyiségek a relatív Ljapunov-indikátor (RLI), a maximális excentricitás (ME) és az excentricitások különbségének maximuma (MDE) voltak. Utóbbi módszert jelen munka elkészítéséhez fejlesztettem ki, és igen hatékynak bizonyult.

A trójai típusú mozgások vizsgálatának során a próbatest kezdőhelyzetét változtatva kerestem meg a stabil tartomány határát hosszú időtartamra kiterjedő numerikus integrálással. Az L_4 ponttól addig távolítottam a próbatest kezdőhelyzetét, amíg el nem értem a stabil mozgás határát. Az így nyert maximális távolságot használtam a stabil tartomány méretének jellemzésére, és a stabilitás μ_R -e síkon vett eloszlásának minden korábbinál részletesebb feltérképezésére.

Munkám során megállapítottam, hogy a Plútó–Charon rendszerben 2006-ban felfedezett két hold, a Nix és a Hydra feltételezett pályaelemei a paraméter-tér stabil tartományába esnek, vagyis a pályájuk stabil. A pályalemez vizsgálata alapján kijelenthető, hogy a holdak pályáinak excentricitása csak viszonylag kis értéket vehet fel. Ez alátámasztja azt az elképzelést, hogy a két hold nem befogás útján vált a rendszer részévé, mivel ilyenkor az elsődleges pályának általában nagy az excentricitása, és csak a Naprendszer koránál hosszabb idő alatt csökkenhetett volna a megfigyelések alapján feltételezett nulla közeli értékre.

A kettős Kuiper-objektumok közül a pályaelemek terében a stabil tartomány kiterjedése alapján lehetséges eddig még fel nem fedezett holdja az alábbi rendszereknek: 1998 SM165, 1999 RZ253 és 1999 TC36. A további megvizsgált rendszerekben (1997 CQ29, 1998 WW31, 2000 CF105 és 2001 QT297) a paraméter-tér stabil tartományának kis mérete miatt kizárható holdak hosszabb idejű jelenléte. Ha mégis sikerülne holdat találni az utóbbi rendszerekben, az a kettős Kuiper-objektumok kialakulására vonatkozó elméletek próbaköve lehetne.

A trójai típusú mozgások vizsgálata során feltérképeztem az L_4 körüli stabil tartomány méreteloszlását az elliptikus korlátozott háromtest-probléma esetében a tömegparaméter és az excentricitás függvényében. Megállapítottam, hogy a méreteloszlás finom szerkezettel rendelkezik, maximumok és minimumok váltogatják egymást. Megmutattuk, hogy a minimum zónák az L_4 körüli librációs mozgás frekvenciái közötti rezonanciákkal vannak kapcsolatban.

Az L_4 körüli stabil tartomány méreteloszlásában egy nagy minimum zóna, az A 2:1 rezonancia, $\mu_R = 0.015$ körül helyezkedik el, ami egy naptömegű csillagot feltételezve

hozzávetőlegesen 15 Jupiter-tömegű kísérőt jelent. Nem valószínű, hogy egy ekkora tömegű barna törpének trójai társa legyen az igen kisméretű stabil tartomány miatt. Ennél nagyobb relatív tömegű barna törpének sem várható, hogy trójai társa legyen, még akkor sem, ha ott a stabil tartomány nagyobb, mivel a rendszernek a kialakulása során át kellene jutnia a nagy kiterjedésű minimum zónán. A magasabb rendű A 5:1, A 4:1 és A 3:1 rezonanciák szintén olyan tömegparaméter értékeket (0,004; 0,006; 0,009) és kapcsolódó excentricitásokat jeleznek, amelyek mellett egy egybolygós exobolygó-rendszerben aligha található trójai bolygó. A legkedvezőbb körülményeket trójai bolygók létezése szempontjából a kis tömegparaméterű és kis pálya-excentricitású óriásbolygók jelentik, bár az ilyen tartományokat is érinthetik a magasabb rendű rezonanciák hatásai.

Munkám alapján kijelenthető, hogy a főszorozati kettőscsillagok körül létezhet az exobolygók egy új osztálya, amelynek tagjai P-típusú pályákon keringenek, továbbá, hogy az egybolygós exobolygó-rendszerekben tág tömegparaméter és excentricitás tartományban lehetséges trójai bolygók létezése.

Összefoglalás

Munkám során megállapítottam, hogy a Plútó–Charon rendszerben 2006-ban felfedezett két hold, a Nix és a Hydra feltételezett pályái stabilak. A pályalemez vizsgálata alapján kijelenthető, hogy a holdak pályáinak excentricitása csak viszonylag kis értéket vehet fel. Ez alátámasztja azt az elképzelést, hogy a két hold nem befogás útján vált a rendszer részévé.

A kettős Kuiper-objektumok közül a pályaelemek terében a stabil tartomány kiterjedése alapján lehetséges eddig még fel nem fedezett holdja az alábbi rendszereknek: 1998 SM165, 1999 RZ253 és 1999 TC36. A további megvizsgált rendszerekben (1997 CQ29, 1998 WW31, 2000 CF105 és 2001 QT297) a paraméter-tér stabil tartományának kis mérete miatt kizárható holdak hosszabb idejű jelenléte. Ha mégis sikerülne holdat találni az utóbbi rendszerekben, az a kettős Kuiper-objektumok kialakulására vonatkozó elméletek próbaköve lehetne.

A trójai típusú mozgások vizsgálata során feltérképeztem az L_4 körüli stabil tartomány méreteloszlását az elliptikus korlátozott háromtest-probléma esetében a tömegparaméter és az excentricitás függvényében. A méreteloszlás finom szerkezettel rendelkezik, maximumok és minimumok váltogatják egymást. A minimum zónák az L_4 körüli librációs mozgás frekvenciái közötti rezonanciákkal vannak kapcsolatban.

Az L_4 körüli stabil tartomány méreteloszlásában egy nagy minimum zóna, az A 2:1 rezonancia, $\mu_R = 0.015$ körül helyezkedik el, ami egy naptömegű csillagot feltételezve hozzávetőlegesen 15 Jupiter-tömegű kísérőt jelent. Nem valószínű, hogy egy ekkora tömegű barna törpének trójai társa legyen az igen kisméretű stabil tartomány miatt. Ennél nagyobb relatív tömegű barna törpének sem várható, hogy trójai társa legyen, még ha ott a stabil tartomány nagyobb is, mivel a rendszernek a kialakulása során át kellene jutnia a nagykiterjedésű minimum zónán. A magasabb rendű A 5:1, A 4:1 és A 3:1 rezonanciák szintén olyan tömegparaméter–excentricitás párokat jeleznek, amelyek mellett egy egybolygós exobolygó-rendszerben aligha található trójai bolygó. A legkedvezőbb körülményeket trójai bolygók létezése szempontjából a kis tömegparaméterű és kis pályaeccentricitású óriásbolygók jelentik, bár ezeket a tartományokat is érinthetik a magasabb rendű rezonanciák hatásai.

Munkám alapján kijelenthető, hogy a kettőscsillagok körül létezhet az exobolygók egy új osztálya, amelynek tagjai P-típusú pályákon keringenek, továbbá, hogy az egybolygós exobolygó-rendszerekben tág tömegparaméter és excentricitás tartományban lehetséges trójai bolygók létezése.

Summary

In my thesis I have shown that, the supposed orbits of the moons Nix and Hydra, which were discovered in the Pluto–Charon system in 2006, are stable. According to my investigation of the orbital element space, I can conclude that the orbital eccentricity of the moons can be in a relatively small range. This is in agreement with the conception that the moons were not captured.

According to the size of the stable regions in the orbital element space, the following binary Kuiper objects can have undiscovered moons: 1998 SM165, 1999 RZ253 and 1999 TC36. In the case of other investigated systems (1997 CQ29, 1998 WW31, 2000 CF105 and 2001 QT297), most probably no moons can exist on stable orbits, since the stable region of the orbital element space is small. On the other hand, if moons were discovered in the latter systems, then we should reconsider the theories describing the formation of the binary Kuiper objects.

Studying the trojan type motions I have mapped the size distribution of the stable region around L_4 in the case of the elliptic restricted three-body problem depending on the mass parameter and the eccentricity. The size distribution has a fine structure, maxima and minima alternate each other. The minimum zones are in connection with the resonances between the frequencies of the librational motion.

There is a large minimum zone in the size distribution of the stable regions around L_4 at the A 2:1 resonance which is located at $\mu_R = 0.015$. Assuming a Sun-like star it means a 15 Jupiter-mass companion. It is not likely that a brown dwarf with such a large mass has a trojan counterpart because of the small stable region. In the case of a more massive brown dwarf it is also improbable that, the dwarf has a trojan counterpart even if the stable region is more spacious in this case, since the system should have gone through the wide minimum zone during its formation. The higher order A 5:1, A 4:1 and A 3:1 resonances mark mass parameter and eccentricity values, for which the existence of trojan exoplanets is unlikely. A system with small mass parameter and small eccentricity is the most ideal for trojan planets, although these parameter ranges can be affected by influences of higher order resonances.

On the basis of my work it can be concluded that a new class of exoplanets can exist around binary stars. These planets would revolve on P-type orbits. Furthermore, trojan planets can exist in exoplanetary systems in a wide range of the mass parameter and eccentricity.

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Érdi Bálintnak, akinek javaslatára kezdtem el jelen dolgozat témájával foglalkozni. Köszönettel tartozom Süli Áronnak is az együtt végzett munkáért, illetve a munkámhoz nyújtott segítségéért. Köszönet illeti az ELTE Csillagászati Tanszékének munkatársait, kiváltképp Forgácsné Dajka Emesét, aki biztosította a munkámhoz szükséges informatikai háttérrel. Szintén a szükséges számítástechnikai háttér biztosításáért jár köszönet az ELTE azon munkatársainak, akik a Szélgép nevű számítógép működését felügyelték, különösen Holicska Andrásnak, aki megismertette a párhuzamos programozás alapjaival is.

A legnagyobb köszönet azonban családomat illeti, amiért lehetővé tették számomra, hogy e dolgozat megszülessen.

A. Függelék

A Rabe-féle frekvencia egyenlet együtthatói

$$\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 576 & -2800 & 5596 & -5925 & 3581 & -1250 & 246 & -25 & 1 \\ 0 & -576 & 880 & -28 & -295 & 24 & 10 & -20 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1200 & -1860 & 230 & 330 & 90 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 144 & -20 & 590 & 140 & 10 & 90 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 24 & 55 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} \kappa^0 \\ \kappa^1 \\ \kappa^2 \\ \kappa^3 \\ \kappa^4 \\ \kappa^5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} z^0 \\ z^2 \\ z^4 \\ z^6 \\ z^8 \\ z^{10} \\ z^{12} \\ z^{14} \\ z^{16} \\ z^{18} \\ z^{20} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

$$A(z, \kappa) = \mathbf{K}_1 \mathbf{M}_1 \mathbf{Z}. \quad (\text{A.3})$$

$$\mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 13824 & -58992 & 102936 & -95319 & 51168 & -16386 & 3060 & -303 & 12 \\ 0 & -15840 & 14704 & 305 & 1156 & -4456 & 1856 & -562 & 84 & 0 & 0 \\ 0 & 33208 & -27678 & 2124 & 4238 & 888 & 180 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3912 & -1370 & 7112 & 1674 & 156 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 326 & 527 & 48 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

$$\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} \kappa^0 \\ \kappa^1 \\ \kappa^2 \\ \kappa^3 \\ \kappa^4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} z^0 \\ z^2 \\ z^4 \\ z^6 \\ z^8 \\ z^{10} \\ z^{12} \\ z^{14} \\ z^{16} \\ z^{18} \\ z^{20} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

$$B(z, \kappa) = \mathbf{K}_2 \mathbf{M}_2 \mathbf{Z}. \quad (\text{A.6})$$

$$\mathbf{M}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 71136 & -336122 & \frac{1249017}{2} & -\frac{1188315}{2} & \frac{2551517}{8} & -\frac{202743}{2} & \frac{75465}{4} & -1874 & \frac{597}{8} \\ 0 & -153720 & 118811 & \frac{166205}{4} & \frac{272839}{8} & -\frac{234923}{4} & 22918 & -\frac{11251}{2} & \frac{5529}{8} & 0 & 0 \\ 31392 & 285673 & -208906 & \frac{133927}{8} & \frac{248663}{8} & \frac{37293}{8} & \frac{11709}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 33952 & 5564 & \frac{361051}{8} & \frac{39175}{4} & \frac{7275}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1589}{4} & \frac{5645}{8} & \frac{249}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

$$\mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} \kappa^0 \\ \kappa^1 \\ \kappa^2 \\ \kappa^3 \\ \kappa^4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} z^0 \\ z^2 \\ z^4 \\ z^6 \\ z^8 \\ z^{10} \\ z^{12} \\ z^{14} \\ z^{16} \\ z^{18} \\ z^{20} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.8})$$

$$C(z, \kappa) = \mathbf{K}_3 \mathbf{M}_3 \mathbf{Z}. \quad (\text{A.9})$$

Az értekezés témaköréhez kapcsolódó saját publikációk

Referált tudományos folyóiratban megjelent dolgozatok

Érdi, B., Nagy, I., Sándor, Zs., Süli, Á., Fröhlich, G.: Secondary resonances of co-orbital motions. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2007, 381, 33

Nagy, I., Süli, Á., Érdi, B.: A stability study of Kuiper Belt binaries. *Astronomische Nachrichten*, 2007, 328, 797

Nagy, I., Süli, Á., Érdi, B.: A stability study of Pluto's moon system. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society Letters*, 2006, 370, L19-L23

Konferencia kiadványok

Nagy, I., Süli, Á., Érdi, B.: P-type orbits in the Pluto-Charon system. In: *Proceedings of the 4th Workshop of Young Researchers in Astronomy & Astrophysics*; Budapest, Hungary, 11-13 January, 2006; Publications of the Astronomy Department of the Eötvös University (PADEU), Edited by E. Forgács-Dajka, 2006, ISBN 963 463 557, ISSN 0238-2423, Vol. 17., p. 71

Nagy, I., Süli, Á., Érdi, B.: Stability investigations of highly inclined planetary orbits in binary systems. In: *Proceedings of the 4th Austrian Hungarian workshop on Trojans and related topics*; Budapest, Hungary, 23-25 June, 2005; Publications of the Astronomy Department of the Eötvös University (PADEU), Edited by Á. Süli, F. Freistetter, A. Pál, 2006, ISBN 963 463 557, ISSN 0238-2423, Vol. 18., p. 95

Érdi, B., Fröhlich, G., Nagy, I., Sándor, Zs.: Stability of hypothetical Trojan planets in exoplanetary systems. In: *Proceedings of the 4th Austrian Hungarian workshop on Trojans and related topics*; Budapest, Hungary, 23-25 June, 2005; Publications of the Astronomy Department of the Eötvös University (PADEU), Edited by Á. Süli, F. Freistetter, A. Pál, 2006, ISBN 963 463 557, ISSN 0238-2423, Vol. 18., p. 85

Irodalomjegyzék

- Astakhov, S. A., Lee, E. A., Farrelly, D., 2005, MNRAS, 360, 401
- Beaugé, C., Sándor, Zs, Érdi B., Süli Á., 2007, A&A, 463, 359
- Benettin, G., Galgani L., Giorgilli A., Streclyn J. M., 1980, Meccanica, 15, 2
- Bennett, A., 1965, Icarus, 4, 177
- Buie, M. W., Grundy, W. M., Young, E. F., Young, L. A., Stern, S. A., 2006, AJ, 132, 290
- Burns, J.A., 2004, Nature, 427, 494
- Chiang, E. I., Lithwick Y., 2005, ApJ, 628, 520
- Christy, J. W., Harrington, R. S., 1978, AJ, 83, 1005
- Cresswell P., Nelson R. P., 2006, A&A, 450, 833
- Danby, J. M. A., 1964, AJ, 69, 165
- Deprit A., Deprit–Bartholome A., 1967, AJ, 72, 173
- Duncan, M. J., Levison H. F., Budd S. M., 1995, AJ, 110, 3073
- Duncan, M. J., Levison, H. F., 1997, Science, 276, 1670
- Duquennoy, A., Mayor, M., 1991, A&A 248, 485
- Dvorak, R., Pilat-Lohinger, E., Funk, B., Freistetter, F., 2003, A&A, 398, L1
- Dvorak R., Pilat-Lohinger E., Schwarz R., Freistetter F., 2004, A&A, 426, L37
- Edgeworth, K. E., 1943, J. Br. Astron. Assoc., 53, 181
- Eftymiopoulos C., Sándor, Zs., 2005, MNRAS, 364, 253
- Elliot, J. L., Kern, S. D., Clancy, K. B., Gulbis, A. A. S., Millis, R. L., Buie, M. W., Wasserman, L. H., Chiang, E. I., Jordan, A. B., Trilling, D. E., Meech, K. J., 2005, AJ, 129, 1117
- Érdi, B., Égi mechanika, 1996, Nemzeti Tankönykiadó, Budapest

- Érdi, B., Nagy, I., Sándor, Zs., Süli, Á., Fröhlich, G., 2007, MNRAS, 381, 33
- Érdi, B., Sándor, Zs., 2005, CeMDA 92, 113
- Ford, E. B., Gaudi, B. S., 2006, ApJ, 652, L137
- Ford, E. B., Joshi, K. J., Rasio, F. A., Zbarsky, B., 2000, ApJ, 528, 336
- Froeschlé, Cl., 1984, CeM, 34, 95
- Froeschlé, Cl., Lega, E., Gonczi, R., CeMDA, 1997, 67, 41
- Funato, Y., Makino, J., Hut, P., Kokubo, E., Kinoshita, D., 2004, Nature, 427, 518
- Giorgilli, A., Skokos, C., 1997, A&A, 317, 254
- Goldreich, P., Lithwick, Y., Sari, R., 2002, Nature, 420, 643
- Gozdziewski, K., Konacki, M., 2006, ApJ, 647, 573
- Györgyey, J., 1985, CeM, 36, 281
- Holman, M. J., Wiegert, P. A., 1999, AJ, 117, 621
- Holman, M., Wisdom, J., 1993, A&A 324, 778
- Jewitt, D., Luu, J., 1992 IAU Circ., 5611
- Ji, J., Lin L., Kinoshita, H., Li, G., 2005 ApJ, 631, 1191
- Ji, J., Kinoshita, H., Lin, L., Li, G., 2007, ApJ, 657, 1092
- Kasting, J. F., Whitmire, D. P., Reynolds, R. T., 1993, Icarus 101, 108
- Kuiper, G. P., 1951, AJ, 55, 164
- Laughlin, G., Chambers, J. E., 2002, AJ, 124, 592
- Levison, H., Duncan, M., 1993, A&A 406, L35
- Levison, H., Shoemaker, E., Shoemaker, C., 1997, Nature, 385, 42
- Lohinger, E., Dvorak, R., 1993, A&A, 280, 683
- Marik M., Csillagászat, 1989, Akadémiai Kiadó, Budapest
- Mathieu, R. D., Ghez, A. M., Jensen, E. L. N., Simon, M., 2000, Protostars and Planets IV, 703
- McKinnon, W. B., 1989, ApJ, 344, L41
- Meire, R., 1981, CeM, 23, 89
- Millis, R. L., Buie, M. W., Wasserman, L. H., Elliot, J. L., Kern, S. D., Wagner, R. M., 2002, AJ, 123, 2083

- Morbidelli, A., Thomas, F., Moons, M., 1995, *Icarus*, 118, 322
- Nagy, I., Süli, Á., Érdi, B.: Publications of the Astronomy Department of the Eötvös University, Vol. 18., p. 95
- Nagy, I., Süli, Á., Érdi, B., 2006, *MNRAS*, 370, L19
- Nagy, I., Süli, Á., Érdi, B., 2007, *AN*, 328, 797
- Nauenberg, M., 2002, *AJ*, 124, 2332
- Pilat-Lohinger, E., Funk, B., Freistetter, F., Dvorak, R., 2002, *Proceedings of the Second European Workshop on Exo/Astrobiology*, 547
- Pilat-Lohinger, E., Funk, B., Dvorak, R., 2003, *A&A*, 400, 1085
- Pilat-Lohinger, E., Dvorak, R., Funk, B., Bois, E., Freistetter, F., 2003, *Proc. "Towards Other Earths: DARWIN/TPF and the Search for Extrasolar Terrestrial Planets"*, 543
- Pilat-Lohinger, E., 2005, *Dynamics of Populations of Planetary Systems Proceedings*, 71
- Rabe, E., 1970, in Giacaglia G.E.O., ed., *Periodic Orbits, Stability and Resonances*. D. Reidel Publ. Co., Dordecht, p. 33
- Rabe, E., 1973, in Tapley E.D., Szebehely V., eds, *Recent Advances in Dynamical Astronomy*. D. Reidel Publ. Co., Dordecht, p. 156
- Robutel, P., Gabernm F., 2006, *MNRAS*, 372, 1463
- Sándor, Zs., Érdi, B., Efthymiopoulos, C., 2000, *CeMDA*, 78, 113
- Sándor, Zs., Érdi, B., Széll, A., Funk, B., 2004, *CeMDA*, 90, 127
- Sándor, Zs., Kley, W., Klagyivik, P., 2007, *A&A*, 472, 981
- Schwarz, R., Pilat-Lohinger, E., Dvorak, R., Érdi, B., Sándor, Zs., 2005, *Astrobiology*, 5, 579
- Schwarz, R., Dvorak, R., Pilat-Lohinger, E., Süli, Á., Érdi, B., 2007, *A&A*, 462, 1165
- Skokos, Ch., 2001, *JPhA*, 34, 10029
- Stephens, D., C., Noll, K. S., 2006, *AJ*, 131, 1142
- Stern, S. A., Weaver, H. A., Steffl, A. J., Mutchler, M. J., Merline, W. J., Buie, M. W., Young, E. F., Young, L. A., et al., 2006, *Nature*, 439, 946
- Sussman, G., J., Wisdom, J., 1992, *Science*, 257, 56
- Süli, Á., Dvorak, R., Freistetter, F., 2005, *MNRAS*, 363, 241
- Szabó, M. Gy., Szatmáry, K., Divéki, Zs., Simon, A., 2006, *A&A*, 450, 395
- Thommes, E. W., 2005, *ApJ*, 626, 1033

- Tinney, C. G., Butler, R. P., Marcy, G. W., Jones, H. R. A., Laughlin, G., Carter, B. D., Bailey, J. A., O'Toole, S., 2006, ApJ, 647, 594
- Torbett, M. V., Smoluchowski, R., 1990, Nature, 345, 49
- Tschauner, J., 1971, CeM, 3, 189
- Veillet, C., Parker, J., Griffin, I., Marsden, B., Doressoundiram, A., Buie, M., Tholen, D. J., Connelley, M., Holman, M. J., 2002, Nature, 416, 711
- Vogt, S. S., Butler, P. R., Marcy, W. G., et al., 2005 AJ, 632, 638
- Weidenschilling, S. J., 2002, Icarus, 160, 212
- Zinnecker, H., Mathieu, R., 2001, The Formation of Binary Stars, IAU Symp. 200